

「創意遊戲與數學思維」教學與研究

陳東賢*

摘要

「創意遊戲與數學思維」課程以基於遊戲的學習模式，誘發學生學習興趣，讓學習者獲得數學知識內容與思維方法。每週課程透過不同主題設計，讓學生探索具數學成分且有趣的遊戲和未解的問題。教學過程藉由玩數學、欣賞數學、學習數學及思考數學等活動，以引發學生觀察、探索、發現、分析、論證等一連串數學的學習。課程更期盼激發學生「創意思考」，由反思遊戲的「原點」出發，跳脫一些遊戲的刻板思維。本課程的學生嘗試設計一些創意數學遊戲，學生從單純解題者轉化為創題者。研究發現，期初學生對數學持有窄觀點與寬觀點分別佔54.17%與45.83%，期末窄觀點與寬觀點改善為20.83%與79.17%，達到統計顯著差異。

關鍵詞：基於遊戲學習、數學文化、數學觀點、數學思維、數學素養

投稿日期：2016年3月31日，2016年7月31日修改完畢，2016年8月31日通過採用

*陳東賢，國立勤益科技大學基礎通識教育中心副教授，Email：chents@ncut.edu.tw

壹、前言

近年來臺灣學生雖然在一些國際數學競賽或調查中數學成績表現優異。如Programme for International Student Assessment (PISA) 與Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS)，但值得我們深究的是學生對於數學的正向態度偏低、自信心不足且高低分群差異兩極化。中央研究院李國偉教授在科學人第132期2月號的文章「TIMSS 2011耐人尋味的問題」中不禁感嘆：「如果我們的優良數學成績，是在如此讓學生感覺痛苦、無用、又挫折的情境中達成，是不是極為得不償失呢？（李國偉，2012）」

我們可由國內學生學習數學歷程探究上述原因，在幼兒時期，孩子的數學啟蒙，常常伴隨著一些有趣的遊戲來探索數學，進入中、小學時期後，有趣的數學遊戲逐漸被一連串的計算、測驗與考試取代，在升學主義掛帥環境下，可以發現許多學生在努力學習數學的同時，也漸漸厭倦與討厭數學，對於數學的觀點也顯得很狹隘。美國總統歐巴馬於2010年9月16日宣佈舉辦「國家STEM電動遊戲挑戰賽（National STEM Video Game Challenge）」，此挑戰賽為「教育創新（Educate to Innovate）」運動的一部分，希望藉由學生玩遊戲和製作遊戲的熱情，激發對科學、技術、工程和數學（STEM）學習的興趣，以提高美國學生的STEM能力。其中「基於遊戲的學習（Game-Based Learning）」已經成為最關鍵的創新領域之一，玩遊戲和製作遊戲的學習可以促進批判性思考、設計能力、問題解決能力的發展，也有助於STEM相關科目學習與職涯發展（Educational Video Game Challenge Unveiled at White House, 2010）。

數學不僅是一門科學，也是一種文化，即「數學文化」；數學不僅是一些知識，也是一種素養，即「數學素養」。依據國內學者劉柏宏（2011）調查三年全國大學數學通識課程發現，大學通識教育在數學類的實施情況常為人所忽視的一環。大學數學通識課程對於一些修課學生而言，很有可能是他們求學生涯中最後的一門數學課，如何改變學生厭倦與討厭數學的刻板印象，讓孩子好好地將以前學習到的數學知識與技巧，基於遊戲的學習，重新燃起對數學的興趣，改善對數學的觀點，回到了數學最初有趣的型態，提昇數學素養，將是「創意遊戲與數學思維」課程的宗旨。

貳、課程設計理念與理論基礎

一、理論基礎

課程理論基礎如同倡導遊戲教學的幼教之父福祿貝爾（Froebel, 1782-1852）之理論「讓遊戲始於快樂，終於智慧學習」（Froebel, 1887）。國內數學教育專家林碧珍教授在「數學魔術與遊戲設計」書序中，開宗明義闡述「玩出興趣、玩出數學腦（林碧珍與蔡寶桂，2014）」。美國總統歐巴馬希望藉由孩子玩遊戲和製作遊戲，激發對科學、技術、工程和數學（STEM）學習的興趣，以達到學習目的。因此「基於遊戲的學習（Game-Bases Learning）」已經成為教育新方向（Educational Video Game Challenge Unveiled at White House, 2010）。臺灣師範大學數學系講座教授林福來教授於2015年全國教育局長會議中表示「我國學生的數學表現呈M型化，他和讀小學的孫子玩撲克牌遊戲時獲得啟發，了解孩子從遊戲中學習數學的效果極好」（林曉雲，2015），因此啟動了數學教育翻轉計畫，在「就是要學好數學（JUST DO MATH）」計畫中，其計畫目標之一即為「藉由有趣的數學活動，對學習數學準備不足之學生，奠立其學習數學的意願與興趣。」計畫中研發許多有趣的數學奠基活動，並透過研發各種好玩的數學遊戲，幫助學生從玩遊戲中學會數學。由以上學者論述，我們可以發現運用基於遊戲的模式在數學學習，有其功效性與意義性。

PISA 2012定義數學素養為：在不同情境脈絡中，個人能辨識、做及運用數學的能力，以及藉由描述、建模、解釋與預測不同現象，來瞭解數學在世界上所扮演的角色之能力。數學素養是連續的，即數學素養愈高的人，愈能善用數學工具做出有根據的判斷，這也正是具建設性、投入性及反思能力的公民所需具備的（臺灣 PISA 2012 精簡報告，2012：8）。

由於PISA對於「數學素養」的定義已得到國際上廣泛的採納，因此以其為基礎並參照國情，李國偉教授等人將完成十二年國教之國民數學素養內涵更加明確闡述如下：數學素養的核心內涵應指個人的數學能

力與態度，使其在學習、生活、社會、與職業生涯的情境脈絡中面臨問題時，能辨識問題與數學的關聯，從而根據數學知識、運用數學技能、並藉由適當工具與資訊，去描述、模擬、解釋與預測各種現象，發揮數學思維方式的特長，做出理性反思與判斷，並在解決問題的歷程中，能有效地與他人溝通觀點。（李國偉、黃文璋、楊德清與劉柏宏，2013，頁：19）。由中外兩個數學素養定義，可瞭解數學素養的重要性，提升學生數學素養有助於未來面對問題與解決問題。

學生的數學觀點未來將會影響其看問題的視野，如同林福來教授認為

臺灣人過去的數學學習經驗，讓大家沒有信心用數學觀點來看外在問題，就算有數學能力也都被掩蓋。本質上，數學不是難的東西，是因為考試讓它變成難的東西。因為要考試，就要有公平的分數，所以在設計題目時把思考的歷程都抽掉，只要標準答案。透過考試，我們把思考變成不思考（陳雅慧，2012）。

國內學者劉柏宏（2007：頁704-705）認為學生的數學觀點包含下面兩大面向：

（一）數學思考的觀點：

學生的數學思考觀點是對於數學內涵的一種微觀概念，是關於數學個別問題之發生與解決過程的理解。舉凡學生對於數學問題之解題過程所必須含括的事實、策略、與數學家解題時之心理狀態等等的看法皆屬於其數學思考的觀點。

（二）數學知識的觀點：

學生的數學知識觀點是對於數學內涵的一種宏觀概念，是關於數學整體知識之成長與演化過程的理解。舉凡學生對於數學知識之增長過程所必須含括的原因、條件、與數學家社群辯證時之互動狀態等等的看法皆屬於其數學知識的觀點。

無論是微觀的數學思考觀點或宏觀的數學知識觀點，若依學生的數

學經驗作分類，Petocz 等人（2007）跨五國研究約1200位大學生後，將學生對數學的觀點做排序，從最狹隘的觀點只專注於使用數字計算，到運用數學概念而專注於建模或抽象結構，最廣泛的觀點是將數學視為一種探究生活方法與一種思維方式。在Petocz 等人論文中，更詳細地將學生對數學的觀點分為下列五種標籤：

數字（number）：將數學視為數字與計算的組合，除了四則運算之外，利用數字來做沒有必要的操縱。在這裡，數學只是一門計算的學科。

組件（components）：將數學視為解題的工具，但卻是與世隔絕的技術。數學是許多定理和定律的精選，可以用來解決方程式與問題。數學是一種被應用在各種訓練的「工具」。

建模（modelling）：這種觀念連結了數學和物理世界。運用數學來解釋與描繪世界。試圖利用代數和數值方法，來解釋物理定律和物理世界的模式。數學，尤其是精算數學，可用來建立模型以分析和預測真實世界的事件。

抽象（abstract）：強調數學是一種邏輯系統或結構，甚至是一種心靈的遊戲。數學是一種描述完備系統的方式，將某些現實世界不會發生的事物呈現於論文。因此，數學只存在於理論上，一個非常快樂的地方。數學不僅是一門思維的學科，它建基於邏輯思維來解決複雜問題。

生活（life）：將數學視為一種生活的重要部份和一種思維方式，學生可能會讓數學和自己的生活產生很強的連結。為了證實與規範大自然運作，數學可以運用分析方式來探究生活。在某種意義上說，數學是瞭解生活如何運作一種方法。數學是大自然的語言。

Petocz 等人依學生對數學的觀點，最窄的觀點為標籤「數字」，接著為「組件」，處理現實世界的「建模」和探究抽象結構與想法的「抽象」均視為相似的較寬的觀點等級，最寬廣觀點為「生活」，關係如圖1所示。我們將利用Petocz 等人對學生數學觀念所分類的五類標籤做為研究分析工具，以便記錄與分析學生數學觀點。

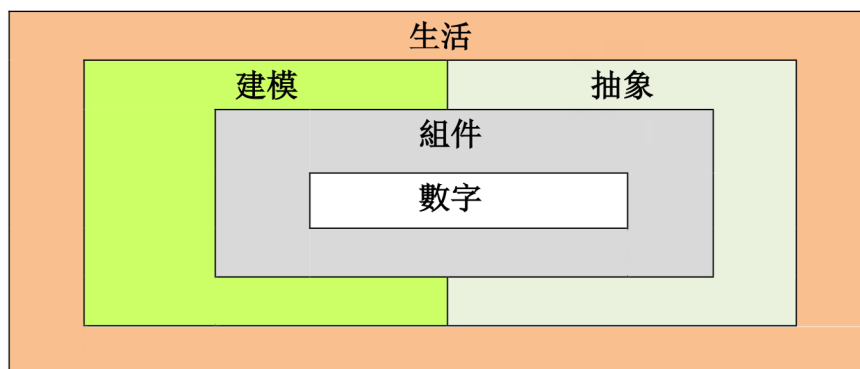


圖1 數學觀點關係圖（Petocz et al., 2007）

二、課程設計理念

廣義上，數學是一種遊戲。狹義上，遊戲是一種讓學生獲得數學文化與思考方法的有效方法之一。通識教育開設的目的之一是希望學生除修讀自身科系專業課程領域之外，能多點生活樂趣與社會關懷，藉由廣泛學習來美化生活，讓生命更有意義。「創意遊戲與數學思維」課程的開設也希望達到相同目的，基於遊戲的學習方式，誘發孩子學習興趣，讓學生獲得數學內容與思維方法，以科技大學學生知識承載度，透過實際動手操作具數學成分且有趣的遊戲和題目，以引發觀察、探索、發現、分析、論證等一連串數學活動。為深化本課程的知識承載度，在各種遊戲活動結束之後將輔以數學背景與知識的說明，從「學中做」過程中有助於學生思考習慣的養成，將有利學生數學與邏輯思維能力的培養。透過教室延伸的教學法，與校外國小機構協同合作，學生需參與校外國小機構服務學習，將課程所學數學遊戲知識應用於國小課後輔導活動，藉由實踐與反思做整合，從「做中學」過程中獲得服務操作與課程學習連結，以實際行動去面對、關懷社會，以達成知識整合導向的全人教育發展。課程更期盼激發學生「創意思考」，由反思遊戲的「原點」出發，跳脫一些遊戲的舊思維，讓學生設計一些創意數學遊戲，學生從單純解題者轉化為創題者，並於學期末小組創作作品將會在服務學習國小發表，讓國小學童參與票選與評分。課程教學目標如下：

1. 提升數學素養。
2. 培養學習者觀察、探索、發現、分析、溝通、論證與問題解決之能力。
3. 在學習的過程中「學會如何學習」，以培養知識整合的能力。
4. 以實際行動去面對並關懷多元化社會與區域環境，增進公民責任感。

教學的設計理念即讓孩子實際動手操作具數學成分且有趣的遊戲和題目，藉由玩數學、欣賞數學、學習數學、思考數學。設計一些作業與指定閱讀報告有助於學生反思學習內容，相關指定閱讀與參考書目會在教學網站提供給學生閱讀，大都以網路上即可瀏覽的數學傳播、科學月刊、HPM文章為主，觸動學生自動學習並培養閱讀習慣。對課堂內容更深入瞭解，除展現數學思考的本質之外，也將有助於學生「閱讀與思考」習慣的養成，建立與時俱進的終身學習能力。透過「課程」結合「國小課輔」之服務學習，讓學生以實際行動面對與關懷社會。

參、課程結構與內容

課程除主持人授課之外，也邀請興雅國中林壽福老師與靜宜大學統計資訊學系林建華主任到課堂演講，分別與學生講演有趣的「數學魔術」與「生活中的或然率」主題。以下將說明單元主題（表1）的內容、設計和實施情形。

表1 每週單元主題表

週次	教學主題
1	1. 課程簡介、分組、服務學習簡介與說明 2. 中國數學問題
2	七巧板、九連環與華容道
3	生活中的數學
4	數的特性及其相關問題
5	歐拉數與圓周率
6	魔方陣與數獨
7	邏輯推理及其相關問題
8	古希臘幾何作圖問題
9	期中考
10	專家演講—林壽福老師「數學魔術」演講
11	圖論、七橋問題、四色問題及其相關問題
12	慕比斯環與拓樸學問題
13	專家演講—林建華教授「生活中的或然率」演講
14	多面體與歐拉公式
15	費氏數列與黃金比例
16	期末成果發表
17	賽局理論
18	期末反思與分享

一、主題：課程簡介、分組、中國數學問題、服務學習簡介與說明

本週進度為介紹課程內容與助教，並進行分組，以配合合作學習。再介紹配合課程之國小機構服務學習方案、服務學習簡介與說明。「華容道」是中國古典益智遊戲，與孔明棋、魔術方塊被喻為世界三大不可思議的益智遊戲。三國演義中有一段「智算華容」，故事內容描述曹操於赤壁之戰中計後，遭火燒連環船，曹操數十萬兵馬毀於一旦，只好落得倉皇逃命。諸葛亮算定曹操必定往華容道（現今湖南省境內）方向逃竄，便派下趙雲、張飛，配合東吳大將黃蓋、甘寧，沿途圍追堵截，又立下軍令狀，命關雲長扼守華容道，務必將曹操擒拿到手。不過當曹操

逃至華容道時，義重如山的關雲長，卻擋不住曹操的情義央求，終將曹操放走了……。



圖2 「華容道」棋盤遊戲

相傳有人引用這個歷史典故，設計出「華容道」的棋盤遊戲，遊戲中玩家必須透過棋盤上各棋子的移動，如圖2，讓「曹操」棋子從棋盤上方，最後由正下方缺口移到下方曹營。除此之外，也可以考驗玩家是否能利用最少的移動次數過關。課堂讓學生實際操作與小組討論華容道遊戲，並請同學利用課餘時間自行研究，下週討論解法。

二、主題：七巧板、九連環與華容道數學

本週進度介紹中國古典益智遊戲——七巧板、華容道與九連環。七巧板是一種用七塊板來玩的拼圖遊戲（圖3），以各種不同的拼湊法來拼搭千變萬化的形象圖案。課程先介紹七巧板由來，請同學將厚紙板依圖例製作七巧板，為培養小組合作默契，會顯示幾個有趣圖形（A），進行分組比賽，考驗哪一組同學在最短時間拼出圖形（B）。

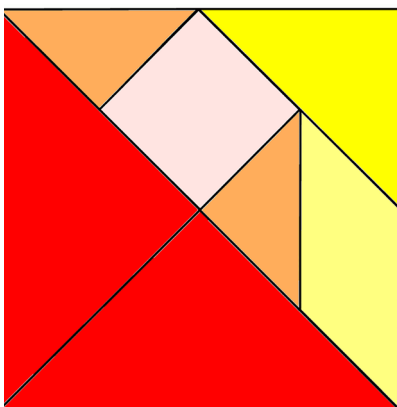
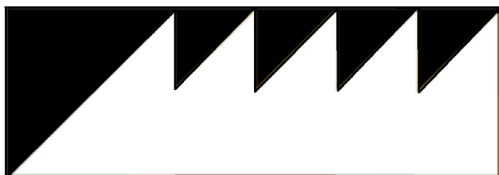


圖3 七巧板



A 待解圖形



B 七巧板有趣圖形

後續介紹在七巧板的一些數學研究，讓學生瞭解在簡單的遊戲背後也會有一些深奧的數學定理。延續上週介紹「華容道」是中國古典益智遊戲，與同學討論解法，並介紹相關研究報告。「九連環」是一種中國古典的智力遊戲（圖4），這種傳統玩具在民間極為普及。它包含着九個相同的圓環及一把「劍」，目的是把九個圓環全套上或卸下。課程介紹九連環由來與九連環解法，並推算出九連環解法次數數學公式。最後請同學實際操作九連環，實際感受環環相扣的情形，進行把九個圓環全套上或卸下。



圖4 九連環

操作九連環時，自然會產生一個疑問「最少需要移動多少次圓環，才可讓九個圓環全套上或卸下？」，因為九連環的構造環環相扣，拆解時會產生遞迴，關於這個問題，我們可以運用數學工具來計算，以1表示該位置的環在劍柄上，利用0表示該環在劍柄下。以5個環為例，如10110表示由右邊算來第1個環在劍柄下、第2個環在劍柄上、第3個環亦在劍柄上、第4個環在劍柄下、最左邊的1，則表示第5個環在劍柄上。我們可以將全部環都在劍柄上的九連環，簡化為下面符號結構111111111。我們的目標是將全部環卸到劍柄下，成為000000000狀態。這裡使用的0與1只是記號，用A與B或其他記號也可以表示。

創意思考遊戲：設計創意「七巧板」，跳脫「七巧板」遊戲的舊思維，不一定是由正方形切割為七塊板子，打造創意的新板，實際拼湊出一些趣味圖形。

下週討論主題預告：我們生活中有哪些方面應用到數學？

三、主題：生活中的數學

本週進度首先與學生討論上星期預告主題：「我們生活中有哪些方面應用到數學？」

我們生活中有哪些方面應用到數學？我們由——買賣、時間、空間（圖5）、測量、電話、運輸、運動、遊戲、娛樂、歷史、紀錄、飛行、工程、攝影、建築、電腦、音樂、藝術、大自然等角度與學生做討論，讓學生感受「數學」的無所不在。



圖5 生活中的數學

我們也與學生討論一些有趣的數學問題，如糖果包裝紙問題、失蹤的1元、分遺產問題、天平問題、電燈開關問題、每個人身份證檢查碼如何形成、觸碰燈泡等問題，或許學生對有些問題一時之間不知如何解答，但最基本的要求是學生知道題目問題所在，試著嘗試去尋找解決之道。本週請學長、姐服務學習經驗分享，服務學習分組與準備教案。

創意思考遊戲：利用生活中簡單素材打造創意遊戲，如時下流行的火柴（筷子）遊戲，利用移動火柴棒（筷子）讓數學等式完成，生活中還有那些素材可以來拿實際操作數學遊戲。

四、主題：數的特性及其相關問題

本週進度與學生討論「數」、「數感」與一些算數問題。首先請學生以第一直覺點出下列數線上「100億」的位置（圖6）。根據教學經驗大部分學生用直覺點出100億的位置都是錯的，而且都錯得離譜，利用這個例子告訴學生直覺很多時候是錯誤的，強調凡事「思考」的重要

性。

因為100億比10兆小，大家都應該會將100億的位置點在10兆的左邊，但很多人會點在10兆的附近，因為他們會認為100億與10兆都很大，所以應該兩數應該都離原點0很遠，這是錯誤的迷思。跳脫錯誤的迷思，我們運用數學計算，10兆為100億的1000倍。若以比值觀點，應該把0到10兆之間分成1000格，100億在第1格的位置，所以事實上，100億的位置反而非常靠近原點0。

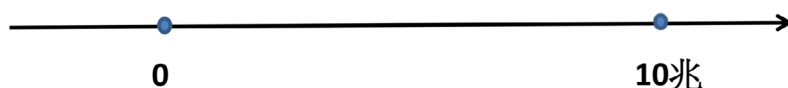


圖6 0到10兆數線圖

若將問題轉變為金錢數量問題，100億元與10兆元都是很大筆的錢，通常可能會出現在國家金融資訊或經費統計資料中，若一般民眾只認為這兩筆錢都是一樣相當大筆的錢，那就陷入錯誤的迷思。如同生活中常見機率統計素材，有效地運用數與量解釋機率統計也是一種重要的素養。雖然金額不分大小都應該審慎看待，但10兆元金額經費的規模應該遠遠大於100億元的規模。

一些「猜數字魔術」、「1A2B遊戲」、「終極密碼」、「等式成立」等遊戲都會在此課堂討論。另外網路上流傳的——阿拉伯數字的寫法與角次數有關嗎？也會與學生討論，提醒學生小心網路的一些知識或許是以訛傳訛，要自己獨立思考去判斷，這也是現代公民核心能力所必須具備的科學素養與媒體素養。

在數字遊戲相關的未解問題——冰雹猜想：隨便取一個自然數，如果是偶數，則用2來除；如果是奇數，則乘以3再加1。此後，對所得計算結果重複上述變換，這樣反覆運算，會發現最終必然得到1，讓學生瞭解問題，討論此一猜想。一些質數相關問題，如「蟬在地下生活週期」與質數關係、梅森質數（Mersenne prime）將會被介紹，另外質數——未解之謎：哥德巴赫猜想：¹是否每個大於2的偶數均可寫成兩個質數之和？是否有無限多個梅森質數？一些數學上尚未解決的問題在課堂上引領學生討論。

¹ 德國數學家哥德巴赫（Christian Goldbach, 1690-1764）於1742年寫信給數學家歐拉（Leonhard Euler, 1707-1783），提出一個質數如上述的猜想，同年6月30日，歐拉回信表示他雖不能證明此一猜想，但他相信這個猜想是正確的。

為推廣facebook網頁討論區使用率與讓學生體驗哥德巴赫猜想，請各位同學測試一下自己學號末3碼乘2是否符合哥德巴赫猜想，如：同學學號末3碼為022，022乘2為44，同學只需將44變為2個質數和，即可加分。

創意思考遊戲：利用數字打造創意「數字遊戲」，如圖7若A, B, C, D為0~9之數字，求A, B, C, D以完成下面乘法。

$$\begin{array}{r}
 A A \\
 \times B B \\
 \hline
 C D C \\
 C D C \\
 \hline
 C A A C
 \end{array}$$

圖7 利用數字打造創意「數字遊戲」

下週請帶尺、圓規、計算機，並想像在古代不知道圓周率 π 的條件下，如何求「圓周長」、「圓面積」與如何計算地球的大小？

五、主題：歐拉數與圓周率

圓周率 π 和歐拉數 e 被認為是數學中最重要兩個超越數（transcendental number）（林聰源，1977），本週進度首先與學生討論介紹世界上最美麗的數學公式： $e^{i\pi}+1=0$ ，與同學討論公式美麗之處，接續討論「圓周率的歷史」、「阿基米德圓周率求法」、「中國在圓周率計算的歷史」、「圓面積求法」、「地球有多大」、「環繞地球的繩子」、「慶祝 π 的生日」、「Buffon 針計算 π 近似值」、「大自然中的 π 」等與 π 相關主題，關於學生最感興趣的「麥田圈」，也有 π 的蹤跡。

討論歐拉數 e ，首先由問題：設存1單位錢在銀行，採複利計算，年利率為100%，若一年中無時無刻地複利，一年後本利和是多少？順勢討論「利息問題」與「億萬富翁」問題，希望學生養成理財的習慣，另外

歐拉數 e 的數學相關性質、圓周率 π 和歐拉數 e 數學外用途也在課堂做討論。

六、主題：魔方陣與數獨

將數字 $1、2、\dots、n^2$ 填入 $n \times n$ 的方格中（簡稱「 n 階方陣」），使得方陣中縱、橫、對角線的和都相同。這樣的方陣，我們就稱為「 n 階魔方陣」（圖8）。首先我們由中國傳統易理哲學中，來自上古時代的圖案「河圖」與「洛書」討論說起，再與學生討論 n 階魔方陣的一般特性與歷史，先討論「奇數」階魔方陣解法技巧，後再討論解「偶數」階魔方陣概念。數獨（圖9）介紹：在 9×9 的大九宮格中有9個 3×3 的小九宮格，已經有一些數字在裡面了，有時也採用字母 $a、b、c\dots$ ，根據這些數字，運用邏輯和推理，在其他的空格上填入1到9的數字，但是要注意每個數字在每個小九宮格內不能重複，每個數字在每行、每列也不能出現一樣的數字。與學生討論數獨解題技巧，數獨需要邏輯思維能力，與數字運算無關。雖然玩法簡單，但數字排列方式卻千變萬化，所以不少教育者認為數獨是鍛鍊腦筋的好方法。一些變型的數獨也在課堂中與學生討論。

創意思考遊戲：跳脫只是玩別人設計的「數獨遊戲」，如何自行設計有創意的「數獨遊戲」。

4	3	8
9	5	1
2	7	6

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

圖8 3階魔方陣（左）與4階魔方陣（右）圖

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

圖9 數獨

七、主題：邏輯推理及其相關問題

本週進度首先與學生討論「誰會去洗澡」問題，讓學生瞭解當一個人的思路受到牽絆時，往往就不能清明地找尋到一切事理的根源，再討論現代人邏輯上的盲點。由命題「若P，則Q」成立，可推論「若 $\sim P$ ，則 $\sim Q$ 」成立，再討論「若Q，則P」、「若 $\sim Q$ ，則 $\sim P$ 」不一定成立，但日常生活卻常出現嚴重推論錯誤，如「若他愛我（P），則他會送花給我（Q）」與「若他沒送花給我（ $\sim Q$ ），則他不愛我（ $\sim P$ ）」等價，但與「若他會送花給我（Q），則他愛我（P）」、「若他不愛我（ $\sim P$ ），則他沒送花給我（ $\sim Q$ ）」沒關係，再由常見例子「若下雨，就打傘」、數學例子「若 $x=1$ ，則 $x^2=1$ 」作討論。

接續討論一些「數學歸納法」、「理髮師的悖論」、「有沒有真理？」、「數學推導過程中何處有誤？」、「照片中的人是誰？」及一系列有趣的「過河問題」等。

創意思考遊戲：思考日常生活或報章雜誌中，是否會有嚴重推論錯誤之處？實際解決之道為何？

八、主題：古希臘幾何作圖問題

課堂開始先與學生討論為何下圖10中下面三角形多了一個小方格？

與學生討論幾何結構的迷思，再次強調「獨立思辨」的重要性。本週期盼學生重拾尺與圓規做圖，從「已知線段二等分」、「已知線段三等分」、「二等分角」、「倍平方」、「拿破崙分圓作法」開始，與學生討論古希臘幾何三大問題與相關數學發展。

古希臘幾何三大問題是，在只准使用（沒有刻劃的）直尺與圓規的限制之下，求解以下的作圖問題

1. 化方為圓問題：求作一個正方形，使其面積和半徑為 1 的圓面積相等；
2. 倍立方問題：求作一個正立方體，使其體積為邊長為 1 的正立方體的2 倍；
3. 三等分角問題：三等分任意已知角。

以上問題的 1 是任意選定的單位長度。

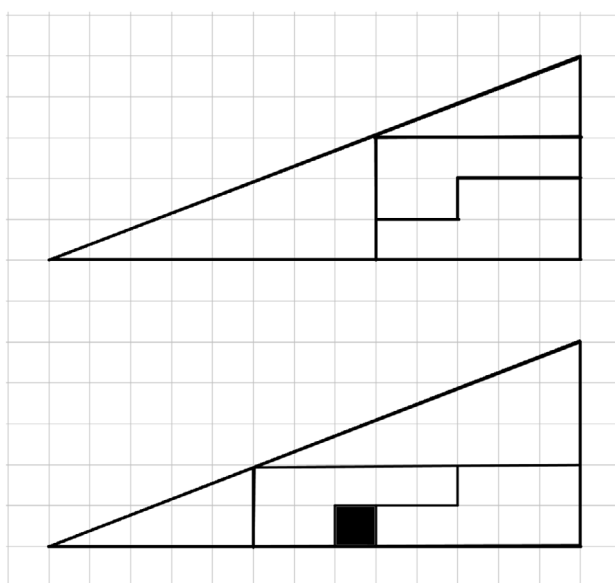


圖10 幾何結構的迷思

三個古希臘幾何作圖問題在一般情況下，是沒有辦法在給定的條件之下完成的。理論依據十九世紀初期法國數學家 Evariste Galois（1811～1832年）發明Galois theory，Galois theory證明五次或五次以上的不可約方程式沒有根式解）（康明昌，1984、1985）。在Galois theory中，體的擴張是一個基本的概念。只要具備體的擴張的幾個基本概念，如維數、有理化分母、維數的相乘性，就可以解決三等分角問題與倍立方問

題。從中與學生討論是否任何次數的方程式都能找到「求根公式」與抽象代數觀念

九、主題：期中考

本週為期中考週，除了一般的紙筆測驗外，利用期中檢討機會，同學與老師進行交流、分享、檢討與反思，並請學生反思在期中考之前的課程內容與國小服務學習。同學可到facebook網頁觀閱大家的期中檢討、建議與反思。

十、主題：圖論、七橋問題、四色問題及其相關問題

課堂開始先與學生討論哥尼斯堡七橋問題：十八世紀的東普魯士（今蘇聯加里寧格勒），美麗的Pregel 河穿過哥尼斯堡，人們在河的兩岸及河中兩個小島間建立了七座橋，將它們連結成一個風景優美的公園。有一天，有人突發奇想：如何才能走遍七座橋，而每座橋都只能經過一次，最後又回到原先的出發點（圖11）。

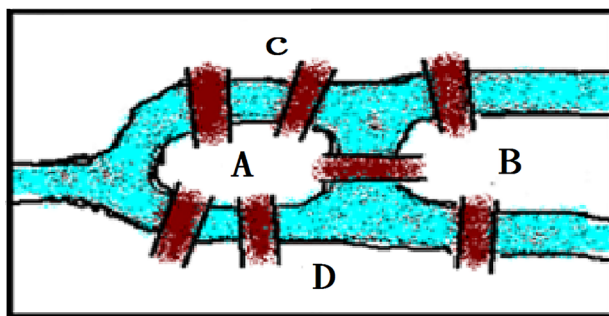


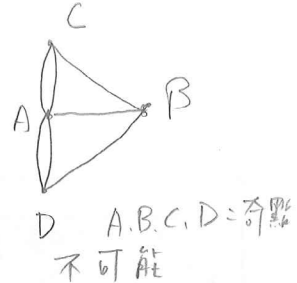
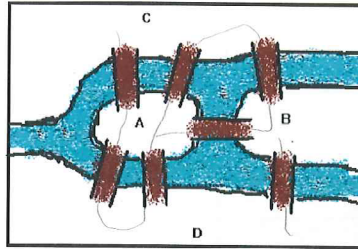
圖11 哥尼斯堡七橋問題

接續介紹在1736年歐拉（Euler）首先以數學的方法，證明上述哥尼斯堡七橋問題無解，並且由此開創了圖論（Graph Theory）的典型思維方式及論證方式（程釗，2012）。延伸討論「一筆畫問題」解法、「哥尼斯堡七橋問題」，「漢米爾頓環遊世界問題」、「臺北捷運圖」與相關問題（圖12）。

哥尼斯堡七橋問題與四色問題

組別：僅供參考

- 哥尼斯堡七橋問題：如何才能走遍下圖七座橋，而每座橋都只能經過一次，最後又回到原先的出發點？



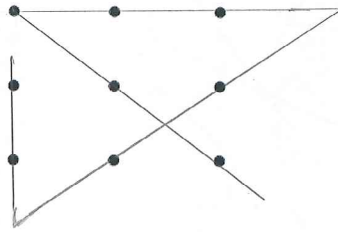
「一筆畫」定義：畫一個圖形時，畫時筆不離紙，同一地方不能畫二次或以上（重覆畫），要一次畫完，起點與終點不一定要相同。

- 『出』字可以用一筆畫出嗎？『串』字可以用一筆畫出嗎？

✗

串

- 請畫四條直線（筆不離紙）貫穿下列 9 個點。



- 下列圖形可以用一筆畫出嗎？

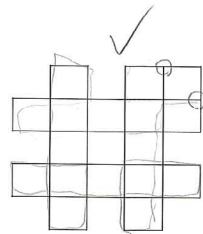
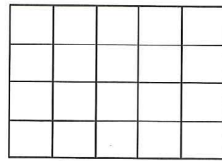
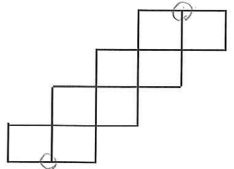
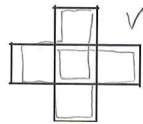
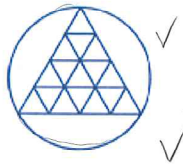
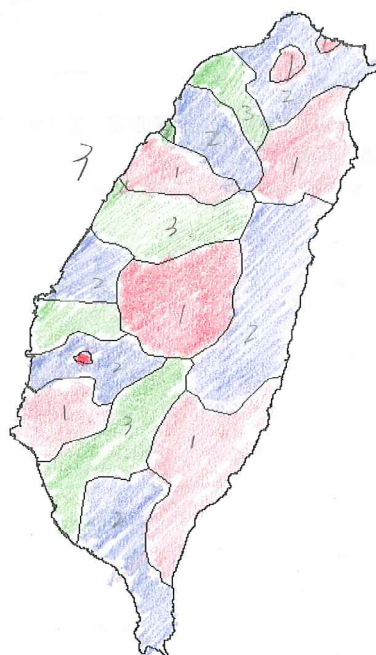
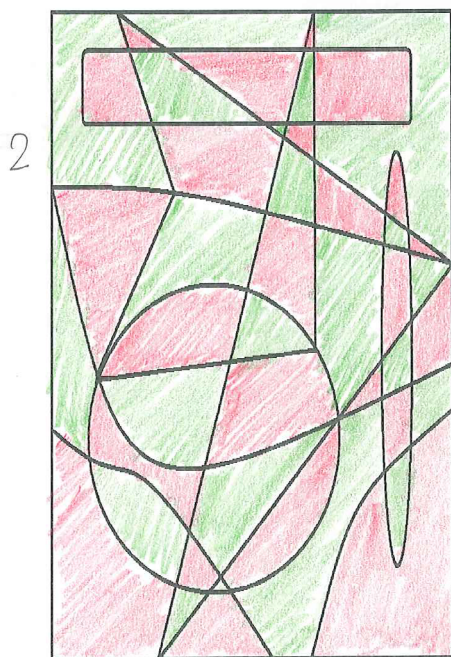
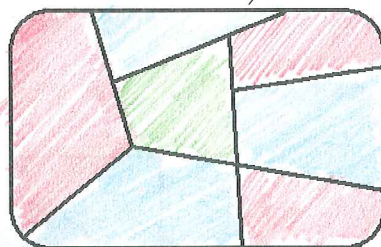
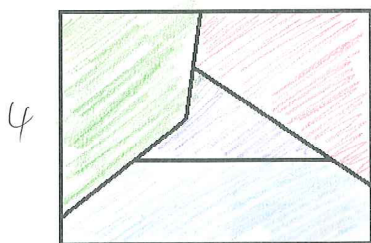


圖12 哥尼斯堡七橋問題與一筆畫問題

- 最少需要多少種顏色來塗，使得相鄰的區域都塗上不同顏色？



- 一位國王，在他臨死前給他的五個兒子留下一份遺囑：

『如果你們希望各自立國的話，可把我的國土分成五份，每人治理一個小國，但是有一個條件，每一個小國都必須與其他四國有共同的國境，否則不准分開。』請問如何劃分？

不可能，因為四色定理。
所以無法分成五份。

圖13 四色定理學習單

接續介紹著色問題，實際給學生分區地圖，助教帶分組討論，問最少需要多少種顏色來塗地圖，使得相鄰的區域都塗上不同顏色？（圖13）探討由「四色猜想」到「四色定理」的發展歷程，並介紹這是人類首次依靠電子計算機的幫助解決的著名數學難題。

下週討論若一位國王在他臨死前給他的五個兒子留下一份遺囑：「如果你們希望各自立國的話，可把我的國土分成五份，每人治理一個小國，但是有一個條件，每一個小國都必須與其他四國有共同的國境，否則不准分開。」請問如何劃分？

十一、主題：慕比斯環與拓樸學問題

課堂開始先與學生討論若有一張長方形紙張，一隻螞蟻要從一點 A 爬到紙張反面的相對稱點 A，請問如何不需要經過紙邊緣？



圖14 慕比斯環

慕比斯環（Möbius strip）是只有一面的連續曲面，可將一個長方形帶子的一端先扭轉 180° 再和另一端連接起來所構成的（圖14）。延續上週問題，國王遺囑將國土分成五份的限制，討論在慕比斯環上如何完成。請助教帶學生討論慕比斯環實際用途，實際依下列情況剪慕比斯環並做討論（圖15），

1. 沿慕比斯環中線處剪一周，看看有何變化？
2. 沿慕比斯環在寬度 $1/3$ 處剪一周，看看有何變化？
3. 沿慕比斯環在寬度 $1/4$ 處剪一周，看看有何變化？



圖15 慕比斯環沿寬度1/3處剪一周

介紹拓撲學（Topology）發展歷史與應用。為讓學生瞭解拓撲學是研究幾何圖形在連續變形下保持不變的性質，像是圖形退化後，交點各數不會改變。請助教帶學生討論利用六根火柴能排出來多少種不同的拓撲圖形？並藉此瞭解等價概念，再利用簡單道具玩「雙人脫困」、「左右互夾」與「移動環」遊戲。

十二、主題：多面體與歐拉公式

課堂開始先與學生討論生活中有那些物體呈現多面體（Polyhedron）（指四個或四個以上多邊形所圍成的立體）。再介紹正多面體（柏拉圖立體）是指各面都是全等的正多邊形且每一個頂點所接的面數都是一樣的凸多面體（圖16）。討論有幾種正多面體與歐拉多面體公式：任何凸多面體的頂點數（Vertex） v 與面數（Face） f 的和，比邊數（Edge） e 多2，即

$$v + f - e = 2$$

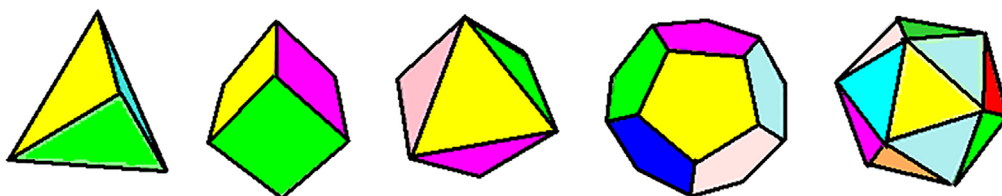


圖16 五種正多面體

十三、主題：費氏數列與黃金比例

課堂開始先介紹義大利數學家費波那契（Leonardo Fibonacci，約 1170-1250）在「算盤書」《Liber abacci》中提出了一個關於兔子繁衍的問題，如果一對成兔每月能生一對小兔（一雄一雌），而每對小兔在牠出生後的第二個月裡，成熟為成兔，第三個月裡，又能開始生一對小兔，假定在不發生死亡的情況下，由一對成兔開始，設 n 個月後會有 F_n 對成兔，求 F_n ？（曹亮吉，1971）



圖17 鸚鵡螺之等角螺線



圖18 大自然的費式數列

討論一些問題，如「 $64=65$ ？」、「楊輝三角與費波那契數列」與一些費氏數列重要性質，並由費氏數列為邊長組成正方形，所畫之等角螺線，延伸到自然界中許多物體都呈現等角螺線的形狀（圖17）。討論未解之謎：已知質數有無限多個，但費氏數列是否含有無限個質數仍是未知的問題。由費氏數列前後項比值可推出黃金比例，由此與學生討論「大自然中的費氏數列」、「黃金分割」、「人體的各種黃金比例」、「高跟鞋的秘密」、「整形風潮」、「藝術與黃金比例」、「建築與黃金比例」等問題（圖18）。

十四、主題：賽局理論

先由社會上媒體常見之遺產問題與學生討論。分家產問題討論：從前、從前有一戶人家因為分家產，老大與老二鬧的很不愉快，而告上衙門，如果你是知縣大人，你要如何解決這場紛爭？這就是一個經典運用賽局理論的例子讓兩個人都得到他們理想中的家產。

介紹賽局理論的發展歷史與相關理論，再與學生討論囚犯困境問題，警方抓到兩位囚犯，然而因為證據不足，所以就把這兩位囚犯分開到不同的房間偵訊，並且分別和他們說，如果提供對方犯罪的證

據，而對方保持緘默的話，對方要做10年的牢，而你可以無罪釋放。若你提供證據，對方也提供證據，那麼你們兩個會各坐5年的牢。但如果你們兩個都保持緘默，那麼因為證據不足，你們兩個分別坐牢6個月（半年）。請問囚犯會如何提供口供？「囚犯困境」（Prisoner's dilemma），係由弗拉德（Merrill Flood）和德雷希爾（Melvin Dresher）在1951年所提出，之後由塔克（Albert W. Tucker）加以明確公式化和命名（李伯聰與李軍，1996）。所謂「囚犯困境」，是說遊戲雙方可能合作，但也可能不合作，描述真實世界是既競爭又合作的常態，證明以個人自我利益為出發點的最後結局，可能是「雙贏」或「雙輸」。

透過一些賽局理論相關遊戲，說明軍備競賽、關稅戰爭、廣告戰、自行車賽、自行取報放錢、「認罪減刑」不可行、公共用品的悲劇（公海捕魚）等賽局理論例子。

十五、主題：期末創意作品發表與個人心得報告

本次課程更期盼激發學生「創意思考」，由反思遊戲的「原點」出發，跳脫一些遊戲的舊思維，讓學生設計一些創意數學遊戲，學生從單純解題者轉化為創題者的角色，挑戰創新構想。我們鼓勵學生創作數學遊戲，雖然開始給一些方向讓學生去思考，但更期待學生以開放的思維去構思，在數理邏輯思考架構下，創作出不可測度的數學遊戲。在期末報告時，透過小組一起發表創意作品，藉由同學互評與建議，讓作品更完善。學期末小組創作作品在服務學習國小發表，讓國小學童參與票選與評分。

肆、教學實踐與研究模式

一、教學實踐

教學互動與課堂經營方法如下：

1. 講述教學：每週規劃一個主題講授教學，並透過數學問題與遊戲，引發討論與思考，讓學生獲得數學內容與思維方法。
2. 合作學習：分組討論與創意遊戲製作，學習合作與分工等團隊精神。

3. 國小機構服務學習：學生依個人意願選擇國小服務機構，進行八小時以上國小學童「課業輔導」，服務時段為國小早自修時間或課後照顧服務時間，修課學生除輔導學童國小課業外，亦需將課程所學習內容透過遊戲方式與學童一起玩數學，讓學童從數學遊戲中學習。
4. 專家講座：邀請相關領域專家蒞校演講增進學生學習。
5. 數位學習平臺：將課程內容與相關資訊放置於網路平臺，讓學生可隨時上網瀏覽，學生可經由網路平臺繳交服務學習週誌、作業與報告。
6. Facebook社團：依照學生使用3C產品習性，建立Facebook社團有助於課程資訊流通、指定閱讀連結與線上問題討論。
7. 反思與分享：學生藉由課堂與課程網站討論區討論、上網繳交服務學習週誌與期末報告等方式，反思與分享服務學習心得，讓學生思考與分享在服務當中之所學，報告需呈現以數學遊戲教授學童歷程與輔導心得。
8. 延伸閱讀：每次課後指配一些延伸閱讀文章，大都以網路上即可瀏覽的數學傳播與科學月刊文章為主，觸動學生自動學習並培養閱讀習慣，協助學生獲得更多的相關知識與概念。

一些與主題相關但未獲得解決的問題或猜想，也會在課堂上與學生一起討論，讓學生瞭解數學的生成有賴於猜想，數學的發展也離不開嚴謹證明，如同數學家華羅庚所言「千古數學一大猜」。課程伴隨「創意思考遊戲」作業，期盼學生跳脫框架，進行設計思考創意遊戲。課程更期盼激發學生「創意思考」，由反思遊戲的「原點」出發，跳脫一些遊戲的舊思維，讓學生設計一些創意數學遊戲，學生從單純解題者轉化為創題者的角色，挑戰創新構想。建築大師法蘭克·蓋瑞說他創作的態度：「我不知道要去哪。如果知道，我不會去。」我們鼓勵學生創作數學遊戲，雖然開始給一些方向讓學生去思考，但更期待學生以開放的思維去構思，在數理邏輯思考架構下，創作出不可測度的創意遊戲。在期末報告時，透過小組一起發表創意作品，藉由同學互評與建議，讓作品更完善。小組創作作品在第16週在服務學習的中華國小發表，讓國小學童參與票選與評分。讓學童瞭解大哥哥與大姊姊的創新作品，最後並將學生創意作品留在中華國小讓小朋友課餘之外可以多玩一些數學。在

交流互動中培養學生好奇心、願參與、善思考、懂交流、會表達、有創意。

在課程的進行中，我們採用小組討論與全班報告的方式，由教學助理引領小組腦力激盪，讓學生充分參與議題討論，培養獨立思考的析辨能力及價值判斷的理性智慧，期盼學生通過討論答問過程與報告，訓練理性分析、批判思考及表達溝通的能力。成績評定方式在課程的進行中，我們採用小組討論與全班報告的方式，由教學助理引領小組腦力激盪，讓學生充分參與議題討論，培養獨立思考的析辨能力及價值判斷的理性智慧，期盼學生通過討論答問過程與報告，訓練理性分析、批判思考及表達溝通的能力。成績評量方式如下：

量化：

1. 平時表現、討論與作業：30%
2. 期中成績：30%
 - (1) 筆試 24%、
 - (2) 創意數學遊戲作品構思規劃書 6%
3. 服務學習與期末反思表：10%
4. 期末創意作品與期末報告：30%

註：（必須完成下列三項）

- (1) 本學期需參與課程安排之國小機構服務學習至少8小時，並繳交週誌。
- (2) 每小組（2~4人）皆需繳交一份「創意數學遊戲」相關創作的期末作品。
- (3) 質化：從課堂上的討論、隨堂作業、學前、後問卷、與期末作品等內容都將做為分析與瞭解學生課堂所學與管考輔導之用。

我們以歷久不衰的「火柴遊戲」為例說明教學實踐歷程，課堂上討論數學問題（下圖19），如同百度網頁上流傳的火柴問題（愛樂奕，2015）。

移動兩根火柴得到最大的數是多少？

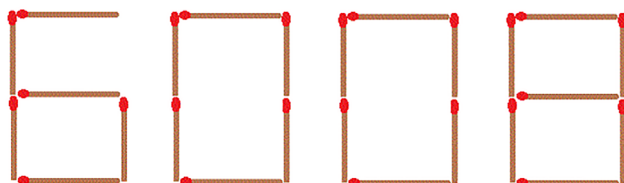


圖19「火柴遊戲」問題

因為只是簡單的移動火柴，學生看到問題馬上就躍躍欲試，鼓勵學生說出能得到最大的數，第一位同學的答案為「9800」，再問問看有沒有更大的，出現第2個答案「9908」，接著下一位學生突破慣性思維，由四位數轉為「16003」的五位數答案，再下一位同學將前面一位的「1」與「6」互調，得到「61003」，接著更有創意的同學，將題目的第2個「0」，上下兩橫拆開變成「611108」。

遊戲進行至此，似乎停滯不前，播了一下Line上的一段影片，發現可以變成「677778」，有學生提出影片解答中爭議，即有四個電子數字「7」連在一起的問題。經過影片刺激過後，有學生提出翻轉的概念，換個角度看可以「877779」，與網路上另一段影片想法不謀而合。遊戲進行至此，似乎難以突破到更大的數，等待許久，有學生想到「次方」的概念，即將之前「611108」中的「1」的兩根火柴移到次方，得到「61108¹¹」，但隨即引發討論，次方的「11」結構不是電子數字。但這也讓一位同學想到次方的另一種表示方法「^」，即將兩根火柴變成「^」，所以得到一個更大的數「60^{^118}」。隨後另一位同學提出另一個數「6^{^1108}」，此時請同學「60^{^118}」與「6^{^1108}」思辨哪一個數比較大？

如何利用數學方法論證兩數大小，除了利用指數率做變化比大小外，我們也可以引進對數「Logarithm」的概念，比較兩數的位數，在電影「那些年，我們一起追的女孩」，男主角柯景騰轉身向女主角沈佳宜說出許多數學老師的痛——「我敢跟妳賭，十年後，我連log是什麼都忘了，照樣活得很好」（柴智屏製作，九把刀導演，2011）。從比較兩數大小的方法，我們可以看到log的威力。教學的設計即是由一個簡單的

遊戲，透過實務設計引發學生觀察、探索、發現、分析、論證等一連串數學活動。下課後，在facebook上繼續與同學討論是否還有更大的數。最後站在巨人的肩膀上，結合許多同學的創意，我們從照片另一邊看過來，我們可以得到「 8^{1109} 」。藉此告訴孩子數學的一些發現就如同大家討論這個火柴問題一樣，經過數學家的努力與創新的想法，造就數學的許多發現！藉此來彰顯「數學文化」。後續還有學生facebook上PO文，學生利用數學「十六進位」與「階乘！」概念製造更大的數。

學生PO文「老師～如果我把圖倒過來看，變成8009，然後把8的兩根火柴拿走，再把一支放成直的，另一支立著（因為是火柴，所以當然可以變成立體）就能做出這個東西→E009！（驚嘆號是由一支縱向躺平的火柴以及一支站立的火柴組成）在16進位裡，E代表14，所以E009轉換成10進位就是： $14 \times 16^3 + 9 = 57353$ ，所以整個算式就是57353！， 8^{1109} 以log運算之後也只有1002個位數，而光40！就有48位數（我計算機的極限），以最保守的估計，假設後面每40個數乘積也只有48位（實際上當然遠遠超過），最後也會有 $1433 \times 48 = 68784$ 個位數（1433是 $57353 \div 40$ ），所以可知 $57353! > 8^{1109}$ 」。

我再回覆「當然57353! 遠大於 8^{1109} ，其實只要想像 $57353! > 8 \times 9 \times 10 \times \dots \times 1116 > 8 \times 8 \times \dots \times 8 = 8^{1109}$ 。將數字轉化為16進位很有創意，用兩根火柴變成階乘！也很有想法，只是！的想法可能會有爭議！」

學生再PO文「老師這個證明超讚的！」後續學生再PO文「突然想到其實直接簡單的變成81109！反而更大欸XD 謝謝老師的回應」。

二、研究模式

許多研究已指出學生的數學觀點和數學學習有著密切的關聯。除課程設計之外，也想了解所設計之課程，對於幫助學生發展其數學觀點有著何種程度的成效。我們將研究學生在教學實驗前後，其數學觀點是否轉變？詳細研究方法如下：

1. 對象：

科技大學選修「創意遊戲與數學思維」通識課程的學生，大都為主修工程背景與管理背景學生，人數共有四十八人。

2. 研究工具：

- (1) 數學本質問卷：此份開放式問卷係由劉柏宏教授所研究開發（劉柏宏，2007），並已歷經多次研究與修正，成果也已於國內外期刊發表。問卷內容在觀測大學生對於「數學思考」與「數學知識」之觀點，內容包含數學之經驗性、創造性、工具性、邏輯性、確定性、與社會文化等面向。
- (2) 書面報告：學生於學期中繳交的隨堂作業、問卷、期末創意報告等內容都將做為分析與瞭解學生數學本質觀點與學習成效之用。
- (3) 實施步驟：本研究採單一群體前後測研究法，在課程之初始與結束之前將針對修課學生實施問卷檢測。
- (4) 數學觀點分析：我們將利用Petocz 等人（2007）對學生數學觀念所分類的五類標籤做為研究分析工具，以便記錄與分析學生數學觀點。研究將分為下列兩大類：
 - a. 「窄觀點」（narrow view）：包含「數字」與「組件」兩個標籤，將數學視為數字與計算的組合，除了四則運算之外，利用數字來做沒有必要的操縱。在這裡，數學只是一門計算的學科或解題的工具，但卻是與世隔絕的技術。數學是許多定理和定律的精選，可以用來解決方程式與問題。數學是一種被應用在各種訓練的「工具」。
 - b. 「寬觀點」（broad view）：延續Petocz等人論文的「建模」、「抽象」與「生活」的概念，運用數學處理現實世界或轉化為抽象結構與想法。學生建立數學模型以描繪、分析和預測真實世界的事件，或是運用邏輯思維來撰寫複雜的問題。數學被視為一種生活的重要部份和一種思維方式，學生可能會讓數學和自己的生活產生很強的連結。

伍、結果與建議

一、學生學習成果

「創意遊戲與數學思維」課程以基於遊戲的學習方式，讓學生獲得

數學內容與思維方法，以科技大學學生知識承載度，透過實際動手操作具數學成分且有趣的遊戲和題目，以引發觀察、探索、發現、分析、論證等一連串數學活動。透過講述教學、遊戲操作、創意遊戲作品、小組討論、合作學習、國小機構服務學習、專家講座、課程facebook網站、反思與分享、指定閱讀等方式達成教學目標，從學生學習表現、小組討論與心得報告，發現課程可引發學生對數學興趣，輕鬆學習。改變對數學只有一堆數字、難懂公式、深奧定理等的刻板印象。讓學生重新發覺數學是不死板的，其實與生活上的東西都息息相關。找回學習數學的興趣與熱情。另外學生也可利用服務學習的過程中體會人生意義，瞭解幫助他人是一件容易且快樂的事。

課程期盼激發學生「創意思考」，由反思遊戲的「原點」出發，跳脫一些遊戲的舊思維，讓學生設計一些創意數學遊戲，學生從單純解題者轉化為創題者的角色，挑戰創新構想。我們鼓勵學生創作數學遊戲，雖然開始給一些方向讓學生去思考，但更期待學生以開放的思維去構思，在數理邏輯思考架構下，創作出不可測度的數學遊戲。小組創作作品在第16週期末報告，恰好是聖誕節前一天12月24日在中華國小發表，希望透過小組一起發表創意作品，藉由同學互評與建議，讓作品更完善。我們還請學校OP氣球社製作一些氣球玩具，希望帶給小朋友有不一樣的聖誕節，每一組的作品讓國小學童參與票選與評分。讓學童瞭解大哥哥與大姊姊的創新作品。

學生的作品相當多元，如「天才小釣手」創意作品為四人一組，分組比賽遊戲，藉由所出的數字題目，參與遊戲的學童需釣出兩個相乘數字等於題目的數字魚。此作品利用釣魚有趣模式，訓練學童手腦並用搭配出正確的答案。「眼明腳快」創意作品為雙人遊戲，藉由對手所站位置，另一方需於三秒內兩腳迅速站在正確位置，訓練學童腳腦並用以搭配出正確的答案。「正正方方」創意作品為兩組比賽幾何遊戲，藉由輪流投入圓形代幣，雙方比賽誰先推出正方形，過程中需集體合作，一方面干擾對方排成正方形，另外也要製造機會讓己方排出正方形獲勝。「眼明手快」創意作品為多人遊戲方式，參與遊戲學童需聽裁判指示，眼明手快地用手蓋住正確的答案。其餘尚有「疊疊樂」、「數字圍棋」、「數學大富翁」、「迷宮奇航」等創意遊戲等，顯現時下大學生的創意無窮，運用數學知識與思維，合作設計數學遊戲，除增加自身實

務經驗外，也帶給學童許多驚艷的獨一無二作品。最後將學生創意作品留在中華國小讓小朋友課餘之外可以多玩數學。發表會後訪談中華國小師生，覺得成效相當良好，除了學生平時到小學輔導課業與數學遊戲教學，在期末讓小朋友看見大哥哥與大姐姐的創意數學遊戲作品，充分展現「學中做、做中學」的螺旋上升成效。

一些同學期末填寫心得內容如下：

S1：老師生動活潑的教學方法讓我覺得數學不再那麼生硬死板，不像有些老師只會照著課本念，希望未來老師也能秉持與學生零距離的互動模式，期末的創意遊戲也很棒，不會讓學生以考試的心態去準備，而是以如何帶小朋友歡樂的目標去設計遊戲，希望這也能持續下去，感謝老師。

S2：這門課與其它課不同，不僅是就書本上的理論講解，更進一步將所學運用於許多地方，令學習又成為一件有趣的事，希望未來能有更多這類型課程。

S3：這門課深深顛覆了以往對數學的想法，原來生活周遭就無時無刻在使用著數學，只要多用點心，就會發現數學的有趣之處，不僅僅是拘限於課綱，創意數學值得一上。

S4：謝謝老師用心的準備課程，每一次上課都對數學有新的領悟。老師幽默有趣的上課方式更是刮目相看。老師你辛苦了，謝謝你！

S5：真的是一門讓人出乎意料的上課方式，感覺真的很棒！上課方式挺吸引人的，會讓我們有想去上課的動力，希望能多開一些這樣的課，謝謝老師！

S6：覺得這堂課很有趣 也希望多多介紹一些很神奇的冷知識，與特別的東西，與學生互動讓我覺得課程更有活力不會死氣沉沉。
Good~！

S7：感謝老師這學的認真教導，讓我們能以輕鬆的方式快樂學習，並且有了很多不一樣的體驗，很高興能選到老師的課程，看見更高更廣的視野，真的很謝謝您。

因第一次執行學校「教學創新課程」計畫，學期末忘記施測「創新教學課程問卷調查表」，在寒假中緊急補做，只回收23份問卷（18位男生與5位女生），其中有3位大二、19位大三與1位大四生，對課程的看法都很正面，由下表問卷結果（表2）可以發現學生大都非常肯定「創意遊戲與數學思維」課程，學生也希望學校未來能有更多類似課程，可見課程執行有相當的成效。

表2 創新教學課程問卷調查表

題 組	非 常 不同意	不 同 意	無 意 見	同 意	非 常 同 意
1. 我覺得這堂課有符合創新的宗旨（如教材或教法或上課模式…等）：	0	0	0	6	17
2. 我覺得上課方式有激發我很多想法	0	0	0	8	15
3. 這堂課明顯提昇我的學習動機與興趣	0	0	0	5	18
4. 這堂課明顯增加我對課程學習投入的時間	0	0	1	8	14
5. 我覺得這堂課對於我的學習有顯著幫助	0	0	1	7	15
6. 我覺得教學內容有達到我的預期	0	0	0	8	15
7. 我希望未來能有更多類似課程	0	0	0	5	18

二、研究結果

除課程設計之外，我們也想了解所設計之課程，對於幫助學生發展其數學觀點有著何種程度的成效。我們將研究學生在教學實驗前後，其數學觀點是否轉變？從研究發現，關於學生回答數學本質問卷中「數學是什麼？」答案相當多元與複雜，我們將學生答案分為寬觀點與窄觀

點兩種，期初至期末數學觀點變化統計表如下面表3所示。表中對角線數字顯示期初與期末數學概念沒有轉變的學生人數。值得欣慰的是右上角數字16，代表有16位學生的數學觀點由窄變寬，佔期初窄觀點學生的16/26，約61.54%，佔全體學生16/48，約33.33%。另外表格中左下角數字0，代表沒有學生的數學觀點由寬變窄。期初有26人對數學有窄觀點，期末降到剩10人有窄觀點。另外期初有22人有寬廣的數學觀點，期末增加到38人具有寬的數學概念。以百分比解釋，期初學生對數學持有窄觀點與寬觀點分別佔54.17%與45.83%，期末窄觀點與寬觀點改善為20.83%與79.17%，顯現期初期末學生數學觀點轉變達到統計顯著差異。

表3 期初期末數學觀點表

階段	數學觀點	期末		
		窄	寬	合計
期初	窄	10	16	26
	寬	0	22	22
	合計	10	38	48

三、省思與展望

一直以來都提醒自己「沒有最好的教學，只有更好的教學」，如同表3所示期末仍有10位同學的數學觀點依然狹窄，這是值得自己再努力的方向。期末有學生反應意見「老師人很好，希望可以有更多題型，期末作品可以更有規畫性。」與「可以把學習單的內容改得少一點，有時候兩堂課寫不太完學習單。」也讓我省思教學需因人、因時、因地做更好的規劃。此次在服務學習國小期末成果報告的方式，主要以大學生為主，每組報告時都只能讓幾位學童輪流上去玩，下次嘗試以學童為主，各組期末創意作品以擺攤方式，讓每一學童以園遊會方式，玩遍每組創意作品，讓成果發表會更精彩與達到服務學習效益。未來計畫將一些學生創意作品設計開發為時下流行的APP，轉變為可在電腦或手持裝置上遊玩之遊戲，或是與遊戲廠商產學合作開發遊戲產品，增加學生創意數學作品的能見度，期盼提升學生的創意設計能力，挑戰創新構想。

此次「創意遊戲與數學思維」課程感謝學校教學創新課程計畫的

補助下，有教學助理協助教學，可以讓我們更有時間在教學歷程中，與學生做互動、討論與溝通，另一方面也幫助我們教學助理成長，瞭解教學準備、進行與後續的學習活動，培養做事的態度。除了教學助理補助外，業務費與設備費的資助，讓我們在教學教材與教具就可以不用那麼克難，可以增加許多教學資源，豐富教學活動。感謝國立新竹教育大學提供大學教師教學交流平臺，讓自己認識許多志同道合的伙伴。期盼未來在教學相長與定期反思下，與大家一起學習成長。也期許自己開設高品質的數學通識課程，以吸引更多學生選讀數學類通識課程，讓學生進一步理解數學、喜歡數學、學到數學的精髓，讓孩子終身受益。

參考文獻

- 李伯聰、李軍（1996）。關於囚徒困境的幾個問題。**自然辯證法通訊**，**18**(4)，25-32。
- 李國偉（2012）。TIMSS 2011耐人尋味的問題。**科學人**，**132**。取自<http://sa.ylib.com/MagArticle.aspx?Unit=columns&id=2119>
- 李國偉、黃文璋、楊德清、劉柏宏（2013）。**提升國民素養實施方案數學素養期末報告**。臺北：國家教育研究院。
- 林碧珍、蔡寶桂（2014）。**數學魔術與遊戲設計**。臺北：書泉。
- 林曉雲（2015）。邊學邊玩，數學變不可怕。**自由時報**。取自<http://news.ltn.com.tw/news/life/paper/910102>
- 林聰源（1977）。你知道超越數嗎？**數學傳播**，**2**(1)，15-21。
- 柴智屏製作，九把刀導演（2011）。**那些年，我們一起追的女孩【電影】**。臺灣：臺灣索尼音樂娛樂。
- 康明昌（1984）。幾個有名的數學問題（三）：方程式求解問題（上）。**數學傳播**，**8**(4)，2-15。
- 康明昌（1985）。幾個有名的數學問題（三）：方程式求解問題（下）。**數學傳播**，**9**(1)，2-16。
- 曹亮吉（1971）。兔子、鳳梨、向日葵、帕德能廟、正十邊形、鸚鵡螺。**科學月刊**，**2**(8)。取自<http://resource.blsh.tp.edu.tw/science-i/content/1971/00080020/0012.htm>
- 陳雅慧（2012）。林福來談數學素養——用數學思考，聰明過生活。**親**

- 子天下，39。取自：<http://reading.cw.com.tw/Controller?event=READDOC&docid=2000244>
- 程 釗（2012）。歐拉關於七橋問題的解——從數學史與數學教育的角度看。**數學傳播**，36(4)，42-47。
- 愛樂奕（2015）。預防癡呆測試題。百度貼吧。取自<https://tieba.baidu.com/p/4238660448>
- 臺灣PISA 2012精簡報告（2012）。取自<http://pisa.nutn.edu.tw/download/data/TaiwanPISA2012ShortReport.PDF>
- 劉柏宏（2007）。探究歷史導向微積分課程與發展學生數學觀點之關係。**科學教育學刊**，15(6)，703-723。
- 劉柏宏（2011）。大學數學通識教育之現況調查與課程研發。行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告（編號：NSC97-26-2628-S-167-001-MY3），未出版。
- Froebel, F. (1887). *The education of man* (W. N. Hailmann trans). New York, NY: London, D. Appleton Century.
- Educational Video Game Challenge Unveiled at White House (2010). Retrieved from <http://www.joanganzcooneycenter.org/press/educational-video-game-challenge-unveiled-at-white-house/>
- Petocz, P., Reid, A., Wood, L. N., Smith, G. H., Mather, G., Harding, A.,... Perrett, G. (2007). Undergraduate students' conceptions of mathematics: An international study. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 5(3), 439-459.

Teaching and Researching: Creative Games and Mathematical Thinking

Tung-Shyan Chen*

Abstract

We incorporated game-based learning into “Creative games and mathematical thinking” curriculum to inspire students’ interest in learning, increasing their mathematical knowledge and the way of thinking. Teaching course operated by different topics in each week, students had to explore different games and unsolved problems with mathematical content. Teaching activities based on playing, appreciation, learning and thinking with mathematics, in which initiated students learning by observation, exploration, discovery, analysis and authentication. This course encouraged students’ innovative thinking to design mathematical games, rethinking the origin of game and escaping from the stereotype of mathematical games, in which they transformed from pure problem solving into a creator. In the beginning of course, students’ conceptions of mathematics in narrow and broad view were 54.17% and 45.83% respectively, in the end of semester, the distribution changed in significant statistically, narrow and broad view were 20.83% and 79.17% respectively.

Keywords: game-based learning, mathematical culture, conceptions of mathematics, mathematical thinking, mathematical literacy

Received: March 31 2016, Modified: 31 July 2016, Accepted: August 31 2016

* Tung-Shyan Chen, Associate Professor, Fundamental Education Center, National Chin-Yi University of Technology, Email: chentsn@gmail.com

