

# 數理統計創新教學：資訊科技融入與數位學習 網站實作之教學實踐歷程

盧宏益\*

## 摘要

數理統計是多數統計資訊學系學生深感學習困難的科目。本研究目的為使用R-SHINY程式套件進行統計計算模擬，透過資料視覺化幫助學生學習抽象的數學概念。研究對象為107學年度修課學生，實驗組學生除了傳統的講授方式外，並輔以電腦輔助教學法、合作學習教學法與海報發表教學法三種不同的創新教學策略進行教學，對照組則僅使用講授方式教學。研究結果顯示實驗組學生的學習成效優於對照組學生，而透過海報成果發表，藉由評分教師的提問，學生更能發現自己學習迷思。本研究並建構互動式數理統計數位學習網站，輔助同學線上學習，達成自主學習之目的。

**關鍵詞：**R-SHINY、資料視覺化、數位學習、數理統計



---

DOI：10.6870/JTPRHE.202012\_4(2).0004

投稿日期：2020年9月14日，2021年2月26日修改完畢，2021年4月1日通過採用

\*盧宏益，輔仁大學統計資訊學系副教授，E-mail: 069201@gapp.fju.edu.tw

## 壹、前言

在教學現場中可以發現，數理統計（mathematical statistics）是多數學生深感學習困難的科目，許多學生對於抽象的數學或統計概念無法具體瞭解，可能原因為多數學生在課堂上是第一次接觸該主題，即使教師給予適當的學習引導與詳細的數理推導，學生仍難以真正瞭解。由於數理科目的學習，常常需要藉由多次的學習與重複練習才能真正瞭解當中的意涵，因此良好的課後複習教材與學習環境顯得格外重要。如能針對課程內容的抽象理論概念進行有效的整理，並以數位教材作為教學輔助，對於學生的學習，將產生極大的助益。多數的教材皆是以教師個人的教學經驗編寫，內容則包含了觀念介紹、理論推導及習題練習等。內容包涵豐富，但是通常欠缺學生學習理論的教學設計，因此教材本身缺乏學生自學性的引導，使得學生自主學習難以落實。在數理科目的學習上，當學生本身並未具備良好的基礎知識，離開了課堂之後，若沒有良好的課後輔助教材，將很難提升學習成效，容易使得學生失去信心及學習意願。

隨著科技技術與電腦網路的進步，透過資訊工具與網路環境的學習型態，已成為當今的潮流趨勢。所謂數位學習（e-learning），係指可以讓學習者在任何時間及任何地點都可以透過 e 化工具來進行學習，相較於傳統課堂上的學習，突破了時間與空間的限制。傳統教學模式中，教師對學生在同一時間進行相同的教學，不考慮學生程度的高低；而在數位學習模式中，學生可以依照個人的學習情況來選擇適合自己的課程與教材。對學生來說，當學習不足或成效不佳時，藉由數位學習平臺的數位教材，透過重複的學習，可以達到適性化教學及補救學習的目的。而教師通常只需準備一次數位教材內容，即可提供給學習者重複的閱讀，達到最大的經濟效益。透過數位學習模式，數位學習平臺可以將所有學生之學習歷程作有系統的完整紀錄，讓教師能夠掌握學習者的學習情況，進而調整教學策略。對學生而言，除了清楚瞭解自己的學習成效，更可以透過系統的診斷分析，有效率地累積個人知識。數位學習相較於傳統的教學模式，在於可以結合通訊、影音多媒體及電腦技術，突破時空限制，教師與學生不再受限於傳統時間地點的限制進行學習，學生可

以依照自己的學習習慣進行學習規劃，提供個人化的學習環境進行自我導向式的學習，透過多元化的學習環境更能增加同儕合作的機會，達成合作式的學習方式，增加學習的廣度。

國內的統計相關科系在教授數理統計課程時，多以講授式的教學方式為之，著重在理論的推導與觀念的講授，線上數位教學影片亦以教師單向講授為主，較少融入電腦程式或資訊視覺化進行輔助教學。目前統計學相關的線上教材多以靜態方式呈現，內容則以觀念陳述與例題演練作為主要架構，無法達成學生自學的引導與輔助，對學習成效幫助有限。有鑑於此，本課程設計理念除了傳統的講授方式外，並針對課程內容的抽象理論概念進行有效的整理後，設計出動態數位教材作為教學輔助，讓學生可以藉由動態操作，將視覺化的意象與統計理論進行連結，期能引發學生的學習動機與興趣，增進學生的學習成效。

## 貳、教學理念與特色

數學科目的學習，是一個可以很好訓練學生在邏輯思考、推演能力上的進步過程。生活周遭到處都能見到數學的存在，但是偏偏數學科又是很多學生在學習上的一項障礙，且是牢不可破的障礙。就因為如此，對於該科的學習產生了拒絕、甚至恐懼，進而沒有培養良好的學習方式，最後產生全然放棄的心態。統計學是在資料分析的基礎上，研究測定、收集、整理、歸納和分析資料，以便給出正確訊息的科學。而數理統計則是統計學的數學基礎，從數學的角度去研究統計學，為各種應用統計學提供理論支持。

林曉芳與盧冠樺（2009）認為雖然統計學的應用能力為現代社會所必備的基本條件，但學生普遍對統計學心存恐懼。統計學的邏輯觀，並非僅侷促於數字的運算或繁瑣公式的使用而已，統計學對學生而言，常有既遙遠又抽象，不得其門而入，摸不著邊的感覺。國內外的研究也可發現這樣的情況，大學生、研究生害怕上統計課，對統計學的學習感受達到不安、焦慮的情況（林曉芳，2013；郭國禎、駱芳美，2011；譚克平，2005；Onwuegbuzie, 2004；Yilmaz, 1996），這種恐懼、生氣、挫

折感與無聊的負向情感與態度，讓學生在學習統計學時更感到困難。

對多數學生來說，統計學是一門不好念的學科，譚克平（2005）提到學生害怕統計學的原因有很多，研究者將其歸納為三點：最主要的原因是統計公式很複雜，這些令人畏懼的公式不容易激發學生立下苦功學習統計學；其次，很多學生把統計學視為是數學的一種，以為學統計就是為了做數字或符號的計算，因此會誤以為數學不好的人也念不好統計學；第三，學生未清楚瞭解到正確的統計學學習方式與信念，真實世界的資料幾乎都不是完美的型態，有時是十分凌亂，有些時候充滿著缺失值，有些時候更是一大筆的數字堆積在那。此外，資料分析者也將因不同的研究目的及假設，採用不同的分析方法，隨之而來的詮釋也就會不同。因此，利用統計學分析資料必須將許多事項伴隨考量，這樣的觀念與學習數學時有明確答案的印象並不相同。

隨著科技的進步與學習型態的改變，教師的教學方式與學生的學習行為模式逐漸從傳統實體課堂的講授改變為以數位學習環境為主體的教學模式。數位學習讓學生可以時時透過資訊工具與網路環境學習，相較於傳統課堂上的學習，突破了時間與空間的限制。然而，當學習模式轉變時，學生的學習方式與心境也會受到不同的刺激與衝擊。適應（adaption）是維護心理平衡的一種持續過程，而因應適應過程中的一些反應行為則為調適及自我防衛。一個好的數位學習環境，必須讓學生在學習上有著高的適應感受，如能提供一個讓學生與教學保持和諧關係的學習環境，將能達到學習最佳化。數位學習中最具價值的部分為適性化學習（adaptive learning）。適性一詞強調因應學生個別差異，調整系統的內容或呈現方式，設計出適性化學習環境。數位學習相較於傳統學習而言，可以提供給學生的個人化的學習情境，依據學生在學習過程中的需要作出適合的回應，達成適性化學習的目的，達到真正的因材施教。適性化的教學，可以讓程度較佳的學生，直接進行進階的教學內容，避免浪費時間學習過於基礎的單元；而程度較差的學生，系統會由基本或是學習困難的內容提供個人化的協助。適性化的學習除了可以增進學習及成效外，更能達成知識養成的效率性。個別化的相關學習理論皆以學生為中心，強調學生主動參與學習的精神（Schunk, 1996）。

張國恩（2002）指出資訊科技融入教學係指運用資訊科技於課堂

教學與課後活動上，其目的除了培養學生運用科技的能力與主動探索的精神，更讓學生可以培養獨立思考與解決問題的能力，達成生涯規劃與終身學習的目的。抽象化的科目更適合將資訊科技融入教學，原因為抽象的東西不易以口頭說明清楚，利用電腦多媒體多樣化的特性，可以將抽象化的教材以視覺化展現，就能提高學習動機和增進學習效果。運用電腦技術融入教學活動，將會改變數學的教學方式及理解歷程，更會提高學生在學習數學的興趣。相關的研究發現，使用資訊融入數學教學可以有效提升學生學習態度及學習成效（陳子宜、謝碧雪，2017；黃楷甯，2016）。關於數位學習或線上學習對於統計學學習成效的研究，DeVaney（2010）研究線上教學對於統計焦慮的影響，發現線上統計教學的學生在學期初較容易產生高度學習焦慮與較低的學習態度，然而在期末學習焦慮明顯降低、學習態度也有正向的提升。楊玲惠、翁頂升與楊德清（2015）探討數位教材的設計與實施，對於教學歷程改進及教學成效提升的影響。藉由動畫教材的設計，以圖形與資料的呈現，強化學生統計思考的能力。研究發現藉由數位教材的使用，可以降低學生的統計焦慮，並有效提升學生的統計學習態度及學習成效。黃添丁（2014）探討數位學習融入統計課程的成效，利用問卷來調查學生的統計焦慮、統計態度對學習成效的影響。研究結果發現有無使用數位學習的學生在統計焦慮、統計態度及學習成效有顯著差異，有使用數位學習的學生統計焦慮感較低，且統計態度及學習成效皆較沒有使用數位學習的學生佳。梁菁萍（2019）將資訊科技融入護理系生物統計課程教學，研究結果發現多元化的教學方式可以增加學生的學習興趣，也能降低學生在學習統計學死背統計的學習模式，對於專業領域醫護資訊的應用，更能帶動其學習意願。

綜合上述，如何將資訊科技融入教學活動中，善用數位教材的便利與優勢，以引發學生對於數理統計的興趣，為本課程的教學理念。教學理念的中心思想以學生為學習的主體，思考如何強化學生基礎統計知識，達成系訂的核心能力。並藉由引發學生的學習動機與興趣，達到不放棄的學習態度，最終達成自主學習的目的。本課程教學活動的設計理念如下：

1. 教學者善用資訊科技，統整學習概念於數位教學中。以學習者的

需求做為教材設計的基本元素，利用數位科技串聯相關單元的概念，使得數位教材產生有意義的關聯知識連結。教學者傳達的是整體主題的知識，而非片段單元的概念。

2. 採取合作學習模式，提升學習動機。合作學習的主體不是老師，而是學習者本身與組員，藉由學生內發的動機與組員的激勵，共同學習與成長。藉由小組的討論，學習者可以達成知識的認知重組，在合作學習過程中，組員間更能達成陪伴者的角色，增加學習士氣。

3. 以學習者為中心，落實做中學理念。發表教學法是以學習者為中心的教學策略，教學者並非扮演單向的教學角色，而是從旁協助學習者將所學得的知識，進行一系列有意義的構思與展現，學習情境轉變為以學習者為主動，與教學者進行雙向溝通的學習模式。

## 參、課程內容與課程設計

本課程的課程名稱為數理統計，為統計資訊學系大二上、下學期各3學分的必修課程，修習的學生大部分為系上學生，少數為輔系或是雙主修的學生。

### 一、課程內容

數理統計是研究統計方法理論的一門科學，本課程的課程大綱中，說明本課程的課程目標為教導學生統計方法的數理原理，課程內容著重於統計性質的數理推導，使學生可以從數學的觀點去探討統計推論與統計決策的問題。在統計資訊學系的課程設計中包含許多統計專業的課程，內容包含不同統計方法的介紹與應用。如果沒有充分瞭解統計方法論的背景與原理，將容易產生統計方法的誤解與誤用，進而做出錯誤的統計推論與詮釋，由此可知本課程的重要性。本課程內容層面涵蓋非常廣，課程內容分量極重，授課內容包括以下主題：

1. 機率模型：包含隨機變數的意義、離散型隨機變數及連續型隨機變數。

2. 多元機率分配：包含多元機率分配的性質討論、隨機變數的轉換方法及順序統計量。

3. 點估計方法：包含點估計的意義、最大概似估計法（method of maximum likelihood）及動差估計法（method of moments）。

4. 點估計的性質：包含不偏估計量（unbiased estimator）、充分性（sufficiency）、有效性（efficiency）及一致性（consistency）。

5. 假設檢定：包含 Neyman-Pearson Lemma、最強力檢定（most powerful test）及概似比檢定（likelihood ratio test）。

本系強調統計與資訊並重，因此相較於國內其他統計學系下，本系統計基礎科目略嫌不足，因此本系學生在本課程的學習上感到吃力。本人任教數理統計課程已有10年的時間，由於本課程屬於理論性課程，且該門課程屬於系上重點課程，評分標準較高，因此淘汰率（不及格比例）也甚高。透過多年開設數理統計的經驗累積，已充分瞭解學生學習狀況。因此如何引發學生學習興趣及提高學生學習成效，一直以來為本人所關心的問題。感謝學校提供多元化的輔助教學工具，本課程曾採用 ZUVIO 進行課程間即時的評量回饋，針對較多同學的問題發生點，在課堂中提供相關觀念的補強。然而在實際的教學時間限制下，僅能提供多數同學的問題進行加強說明，未能針對每位同學個別的問題解答。再者，上述的補強作法僅能侷限於教室中，無法提供學生在課後自我複習之用。

## 二、課程設計

本系共有兩個班級，兩個班級的學生分別作為實驗組及對照組，實驗組學生除了傳統數理統計的講授授課方式外，並輔以電腦輔助教學法、合作學習教學法與發表教學法三種創新教學方法進行教學，對照組則僅使用傳統講授方式教學。本研究在實驗組班級的課程設計包含 R-SHINY教學與數位教學網站兩部分，第一部分以三種創新教學法融入教學中，教學目的為透過互動式R-SHINY視覺化學習介面引發學生的興趣，期能透過互動式的操作與程式設計模擬經驗，將數理統計理論隱含的意義透過資料視覺化的呈現，幫助學生學習抽象的數學概念，增進學

習的成效；第二部分係針對第一部分的實驗結果進行修改後，進一步結合相關電子講義與數位教材建置數位教學網站，目的為提供學生課後學習，達成自主學習的目的。實驗組班級增加三種創新教學法，由於本課程內容繁重，因此新加入的教學法僅能挑選幾個單元融入課程中，分述教學策略如下：

1. 電腦輔助教學法（computer aided instruction, CAI）：電腦輔助教學意指運用電腦的功能來呈現教材進行教學的一種教學情境。學習者在觀看或是使用電腦輔助教學後，將進行成就測驗，用以比較實驗組與對照組的學習成效。本研究採用電腦輔助教學法的教學目標為建立互動式 R-SHINY 視覺化學習介面，利用程式數值模擬，使得學生可以透過視覺化的數值呈現，瞭解數理統計的相關理論意義。本課程並輔以 R-SHINY 設計互動式的呈現介面，使得學生可以在網頁式的介面設計中，簡單的修改參數，達成與程式互動的功能。本研究選擇機率模型（二項分配、Gamma分配與Beta分配）、多元機率分配、順序統計量及抽樣分配作為電腦輔助教學法的實驗單元，本課程每次上課時間為三小時，前兩小時教授相關的理論內容，後一小時融入電腦輔助教學法，並輔以測驗用以瞭解學生學習成效。

2. 合作學習教學法（cooperative learning）：合作學習教學法意指教學者依據某項因素，將學習者分配到不同小組中，進一步給予分組學習為主的教學活動，使小組成員共同合作完成任務，達成團體目標。待學習者完成任務後，教學者可以根據其成果進行評分，並進一步分析不同組別的成效差異，因此在分組前應該做好相關的實驗設計，以便可以進行更深入的學習成效比較。本研究選擇中央極限定理及一致估計量單元作為合作學習教學法的實驗單元，將學生隨機分為14組，每組4~5人，本實驗共進行2次，每次1小時的小組合作實作並進行線上繳交成果，由教師評定是否達到通過標準。

3. 發表教學法（expressive teaching）：發表教學法意指以學習者發表為主要教學活動的教學方法，教學者透過特定的主題，指導學生學習活動，經由不同的表達方式，將所習得的知識作充分而有效的表達。發表學習法的評量標準可以由雙方共同決定，可以於發表間的互動或發表後進行。本研究在學期初分配海報發表的單元（依據內容分量決定每組

人數，每組人數1~3人），每組同學依據所屬單元參與期中或期末發表會。每場發表會分別為1小時及1.5小時，每次發表會分別邀請四位老師擔任評審，根據學生口頭報告及問答回應進行評分。

## 肆、教學實踐歷程

本課程創新教學的核心理念為將資訊科技融入教學活動中，期能藉由數位教材的便利與優勢，引發學生對於數理統計的學習興趣。教學創新實踐分為兩階段落實，教學實踐的第一階段為透過互動式R-SHINY視覺化學習介面引發學生的興趣，期能透過互動式的操作與程式設計模擬經驗，將數理統計理論隱含的意義透過資料視覺化的呈現，幫助學生學習抽象的數學概念，增進學習的成效。此外，為了讓學生可以靈活使用R-SHINY數位教材，本課程同時採用合作教學法及發表教學法策略，引領學生統整並活用所學得的程式，進行R-SHINY數位教材與數理統計理論的整合。教學實踐的第二階段根據第一階段所設計的R-SHINY程式數位教材，建構出互動式數理統計數位學習網站，輔助同學進行線上學習，並透過線上測驗系統，提供學生即時檢測自我學習效果，進而做好自我的學習規劃，達成自主學習之目的。由於原本課程內容已為非常繁重，因此加入新的教學元素後，需更為重視學生的反應與回饋，方能維持教學品質，以下針對相關執行細節、相關班級經營及學生互動進行說明。

### 一、第一階段：資訊科技融入教學

傳統的數理統計教學多以講述法為主，由教師進行單方向的課程內容講授。本研究在教學現場中融入三種教學方法，茲將相關方法執行的細節及觀察到的學生反應說明如下。

#### (一) 教學策略一：電腦輔助教學法

由於本學期統計軟體應用授課內容並非R語言，多數學生對於R語

言並不熟悉，普遍缺乏R語言撰寫能力。因此本課程初期由教師撰寫程式，利用程式呈現理論統計意涵，藉由動態教材的呈現，引領學生觀察圖形或圖表的變化，如圖1所示。圖1教學單元為機率收斂，教學目標為點估計的一致性性質，教師藉由移動左方儀板表參數的改變，引領學生觀察當抽樣樣本數改變時，點估計量的改變情況，學生可以觀察到隨著樣本數增大時，點估計的值會往某個固定值靠近，且點估計值的變動幅度會變小。當學生觀察到點估計的變化後，教師會進一步再次講授相關的定理，藉此連結統計理論與圖像視覺化間的關係，學生將可瞭解點估計期望值與變異數所代表的意義。最後，教師引領學生觀察收斂的值為何，並帶入樣本平均數與母體期望值關係的議題，學生將可清楚瞭解大數法則。待學生觀察或實際操作後，教師並進一步連結程式與原本已學的統計理論之間的關係，希望透過視覺化的呈現讓學生瞭解抽象數學或統計觀念。程式融入教學活動中，可以明顯感受到學生較為專注，在透過視覺化的呈現及說明當中，學生較能去聚焦統計的結果，而不單是數學的推導。為了瞭解學生的學習成效，課堂上完成動態數位教學後，會即時讓學生以手機上網進行線上小測驗。課堂測驗可以瞭解學生是否可以吸收所教導的概念，並針對成效較差的部分進行再次說明，藉由線上測驗發現學生課堂參與度變高，學生課後詢問問題的頻率也變高。

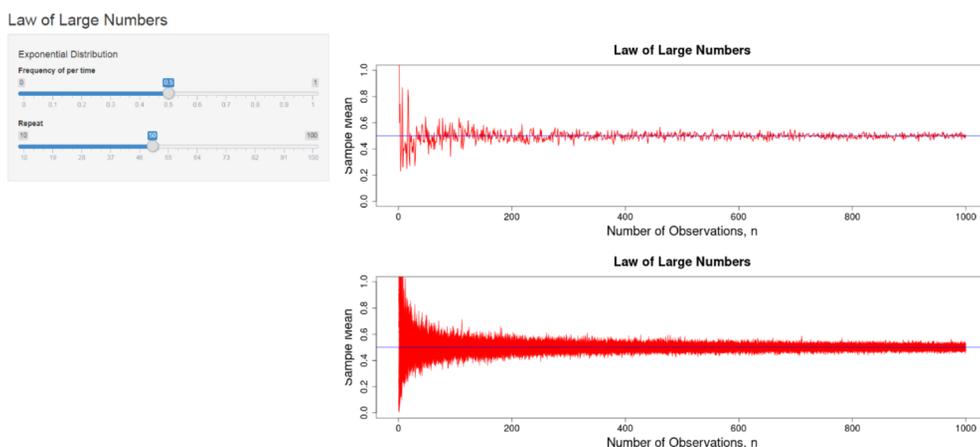


圖1 R-SHINY程式輔助教學

## (二) 教學策略二：合作學習教學法

為了增加學生對課程的參與度，希望可以藉由程式設計的經驗，提升學生思考的靈活度，本課程融入程式設計合作學習教學法。首先由教師複習所學過的統計理論，作為之後進行程式設計的預備知識；接著由教師示範基礎程式，並講解R程式指令。講述的內容除了程式指令本身代表的意義外，更重要的是如何利用這些指令做有意義的統計呈現，利用統計模擬呈現統計理論的意涵，程式畫面如圖2所示。圖2為利用均勻分配驗證中央極限定理的程式碼，教師會解釋每一行指令及如何利用抽樣驗證統計理論的邏輯。待教師講解完畢後，將學生隨機分為14組，每組4~5人，各組學生需完成課堂所安排的學習單，學習單的內容為之前講解程式的進一步延伸，如圖3所示。學習單的設計分為兩部分，第一部分為學生根據教師教導的程式進行修改實作，如圖3中的前兩題，此部分組員間可以分工完成；第二部分則為歸納與討論，如圖3中的第三題，此部分每位同學需要跟同組的組員報告第一部分的結果，並且一起進行結果的統整。由於學習單成果的繳交有時間的限制，因此同學間很快便開始進行討論與互動，藉由分組的討論，除了增加彼此間的互動，也讓學生學會討論式的學習模式。合作學習教學法進行中，學生面臨問題時，於課堂中可以直接詢問教師或是助教，學生主要的問題有兩種，一為程式碼的修改，當機率分配改變時，同學往往只記得要修改程式碼中的分配指令，而沒有同時進行參數的範圍修改，教師或助教此時會提示參數程式碼的位置，同學則可以修改為適合的參數。學生的另一種問題為結果的歸納，教師或助教會建議同學觀察樣本數與實驗次數間的關係，提示學生以此指引進行結果的整理，多數組別在討論後皆能找到正確的方向。藉由學生與教師助教間的詢問，也增加了師生間的互動。學生完成作業繳交後，教師進一步針對作業進行解說，以強化學生的知識獲得。

```
umin <- 0
umax <- 1
n.sample <- 5
n.repeated <- 1000
RandomSample <- matrix(0, n.sample, n.repeated)
for(i in 1:n.repeated){
  rnumber <- runif(n.sample, umin, umax)
  RandomSample[,i] <- as.matrix(rnumber)
}
SampleMean <- apply(RandomSample, 2, mean)
library(EnvStats)
gofTest(SampleMean~1, test = "chisq", distribution = "norm", alternative = "two.sided")
title <- paste("n=", n.sample, sep="")
hist(SampleMean, breaks=30, ylab="f(x)", xlab="sample mean", pro=T, main=title)
```

圖2 R程式範例

### 自Exp(5)抽取n個樣本

1. 在n=5, 50, 500, 5000時，試繪製資料分佈圖。
2. 在n=5, 50, 500, 5000時，計算樣本平均數。重複實驗次數1000次，繪製樣本平均數分佈圖。
3. 承上題，試驗證中央極限定理。

圖3 學習單範例

### (三) 教學策略三：發表教學法

為了落實做中學理念，本課程融入發表教學法，希望同學透過海報發表，統整或延伸所學得的知識。本課程在學期中及學期末時，舉辦兩場主題式的海報發表，每位學生根據在學期初或學期中所指定的單元或主題，同時進行相關的理論推導及程式撰寫，並參與期中或期末發表會展現個人成果，發表內容主題如圖4。兩場發表會共邀請八位教師蒞臨評審講評，並邀請系上學生參加，每場參與人數皆達200人以上。海報發表的目的希望每位同學皆能透過海報的介紹，及教師同儕的提問，充分瞭解數理統計的知識。製作海報時，學生會遇到很多問題，統整學生的問題大致可分為幾大類：第一類問題為海報的內容規劃，由於期初給予的題目多為主題式的題目，需要學生自己設計與此主題相關的內容，

多數學生在開始時沒有方向，教師需與每位學生討論後決定內容；第二類問題為程式撰寫問題，本文在前面章節提及，由於本學期統計軟體應用授課內容並非R語言，因此多數學生對於R語言並不熟悉，尤其當程式涉及迴圈設計時，學生在程式撰寫出現更多的問題，教師需要根據學生問題給予協助；另一類型的問題為海報的美化，初期學生在海報的排版上多為單調的呈現，當教師給予建議與指引後，學生多能接受建議並且最後都能呈現較專業的排版。由於學生的問題比想像中的還多，因此教師除了在原訂的輔導時間提供學生詢問外，並提供以網路訊息的方式詢問，希望可以提供更多的諮詢協助，透過詢問的過程中，不僅可以瞭解學生的學習困難，更拉近了師生間的距離。在主題式的海報發表，透過海報內容的設計與製作，學生可以再一次複習授課內容。透過評分教師的提問，更能找出自己學習困難所在，達成學習的目的。透過教師與學生間的對談，也進一步達成學生間與師生間的互動。圖5為部分海報成果發表截圖，每位學生針對所分配的主題，需要同時以數理推導計算、R程式撰寫模擬及設計R-SHINY互動式介面呈現結果。由於本科目本身授課內容已經非常繁重，額外增加海報發表時，學生不免許多怨言，然而，在學習的歷程中，學生學習到程式的撰寫、海報的設計和海報口說表達的技巧，在發表會中表現可圈可點，無形中也增加了自己的自信，學期末學生也多給予海報發表正面的肯定。

幾何分配、負二項分配	使用 R 程式於估計量不偏性之研究
利用 R 程式比較二項分配及超幾何分配的差異	使用 R 程式於中央極限定理模擬之研究
利用 R 程式驗證指數分配的遺失記憶性	應用 R 程式語言於估計量有效性之研究
條件期望值的性質及其應用	結合 R 程式模擬於驗證幾何分配與負二項分配關係
利用 Python 程式進行連續型多元機率分配的運算	結合 R 程式模擬於 Gamma 分配關係之研究
利用 R 程式進行離散型多元機率分配的運算	應用 R-shiny 實作均勻及 Beta 分配運算及圖形繪製
利用 R 程式驗證常態分配特性	結合 R 程式模擬於機率分配關係之研究---以均勻分配為例
多項分配及其應用	結合 python 程式於雙變數隨機變數的轉換
利用 R-shiny 實做二項分配與 Poisson 分配統計表	結合 python 程式於雙變數隨機變數的轉換
相關係數	結合 R 程式與 R-shiny 於順序統計量之研究-以均勻分配為例
Poisson 分配	結合 R 程式與 R-shiny 於順序統計量之研究-以指數分配為例
常態分配	結合 R 程式與 R-shiny 於順序統計量之研究-以常態分配為例
Gamma 分配	結合 R 程式模擬於機率分配關係之研究---以指數分配為例
二項分配及超幾何分配	用 R 程式與 R-shiny 於大數法則模擬之研究-以指數分配為例
Beta 機率分佈	用 R 程式與 R-shiny 於大數法則模擬之研究-以常態分配為例
利用 R 程式驗證幾何分配的遺失記憶性	用 R 程式與 R-shiny 於大數法則模擬之研究-以 Beta 分配為例
結合 python 程式於單變數隨機變數的轉換	用 R 程式與 R-shiny 於大數法則模擬之研究-以均勻分配為例
R-Shiny 實作常態與 Poisson 分配運算及圖形繪製	應用 R 程式於最大概似估計量(MLE)之探討-以二項分配為例
R 程式模擬於機率分配關係---以常態與卡方分配為例	應用 R 程式於最大概似估計量(MLE)之探討-以 Poisson 為例
R 程式於最大概似估計量之探討-以常態分配為例	應用 R-shiny 實作機率分配運算及圖形繪製-以卡方分配為例
使用 R-shiny 實作中央極限定理	應用 R-shiny 實作機率分配運算及圖形繪製-以二項分配為例

圖4 海報成果發表主題

(2) Find the joint density function of  $Y_{(2)}$  and  $Y_{(4)}$

$$g_{(2)(4)}(y_2, y_4) = \frac{5!}{1! \cdot 1! \cdot 1!} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot y_2} \cdot e^{-\frac{y_2^2}{2}} \right] \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot y_4} \cdot e^{-\frac{y_4^2}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot y_2} \cdot e^{-\frac{y_2^2}{2}} \right] \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot y_4} \cdot e^{-\frac{y_4^2}{2}} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y_2^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y_4^2}{2}}$$

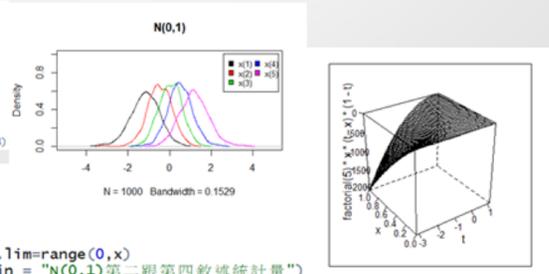
where  $-\infty \leq y_2 < y_4 \leq \infty$

(3) 以R程式計算之過程及所得結果

```
R Code:
#N(0,1)
r = matrix(0,1000,5)
for(i in 1:1000){
  r[,i] = sort(rnorm(5,0,1))
}

plot(density(r[,1]), xlim = c(-5,5), ylim = c(0,1), main = "N(0,1)")
lines(density(r[,2]), col = 2)
lines(density(r[,3]), col = 3)
lines(density(r[,4]), col = 4)
lines(density(r[,5]), col = 5)
name = c("x(1)", "x(2)", "x(3)", "x(4)", "x(5)")
legend(locator(1), name, fill = c(1, 2, 3, 4, 5), ncol = 2, cex = 0.8)

#第二和第四順序統計量
library(mosaic)
library(manipulate)
x = r[,2]
t = r[,4]
plotFun(factorial(5)*x*(t-x)*(1-t)-t&x, t.lim=range(0,x)
, xlim=range(x,1), surface=TRUE, main = "N(0,1)第二跟第四敘述統計量")
```



(4) 以R-shiny呈現之結果 (<http://127.0.0.1:5145>)

```
R Shiny Code:
library(shiny)
ui <- fluidPage(
  sidebarLayout(
    sidebarPanel(
      title("順序統計量"),
      checkboxInput("x1", "x(1)", value = TRUE),
      checkboxInput("x2", "x(2)", value = FALSE),
      checkboxInput("x3", "x(3)", value = FALSE),
      checkboxInput("x4", "x(4)", value = FALSE),
      checkboxInput("x5", "x(5)", value = FALSE)
    ),
    mainPanel(
      plotOutput("p1")
    )
  )
)
server <- function(input, output){
  r = matrix(0,1000,5)
  for(i in 1:1000){
    r[,i] = sort(rnorm(5,0,1))
  }
  output$p1 <- renderPlot({
    plot(density(r[,1]), xlim = c(-5,5), ylim = c(0,1), type="n")
    if(input$x1 == TRUE) lines(density(r[,1]), col = 1)
    if(input$x2 == TRUE) lines(density(r[,2]), col = 2)
    if(input$x3 == TRUE) lines(density(r[,3]), col = 3)
    if(input$x4 == TRUE) lines(density(r[,4]), col = 4)
    if(input$x5 == TRUE) lines(density(r[,5]), col = 5)
  })
}
```



圖5 海報成果發表表截圖

## 二、第二階段：數位學習網站實作

本課程在第一階段將資訊融入教學中，採用了電腦輔助教學法、合作學習教學法及發表學習法於教學中，期能引發學生對於數理統計的學習興趣，幫助學生學習抽象的數學概念，增進學習的成效。然而在實際的教學情境中，由於課程繁重緊湊，無法在所有單元皆融入視覺化教學。從學生的角度來看，融入新的教學法亦將增加學生的學習負擔。另外一個執行上的困難為一旦學生缺課，後續的課程都將無法銜接。因此本課程的第二階段為數位學習網站的建置，根據第一階段所設計的程式教材，結合測驗及其他線上功能，建構出互動式數理統計數位學習網站，輔助同學進行線上學習。以二項分配單元為例，教學網站畫面如圖6所示，點選左側藍色的區塊，畫面會呈現線上PDF講義；點選左側紅框綠色的區塊，則會出現所屬章節的R-SHINY動態教材，此部分為本數位學習網站的特色；而左側最下方紅色的區塊為該章節的練習題，提供學

生完成學習後，進行自我學習成效的檢測，以下針對網站主要功能進行進一步說明。

### (一) 線上電子講義

本網站參考 *Mathematical Statistics with Applications* (by Wackerly, Mendenhall, and Scheaffer, 7th Edition) 章節編排，使用Latex排版進行線上講義編輯與製作，內容章節包含柴比雪夫經驗法則、機率、離散型變數、連續型變數、多元機率分配、隨機變數函數、中央極限定理、估計方法、估計量及其性質以及假設檢定等單元。圖6中選擇教學單元後，點選左側藍色的區塊，畫面會呈現線上PDF講義，提供學生線上閱讀。

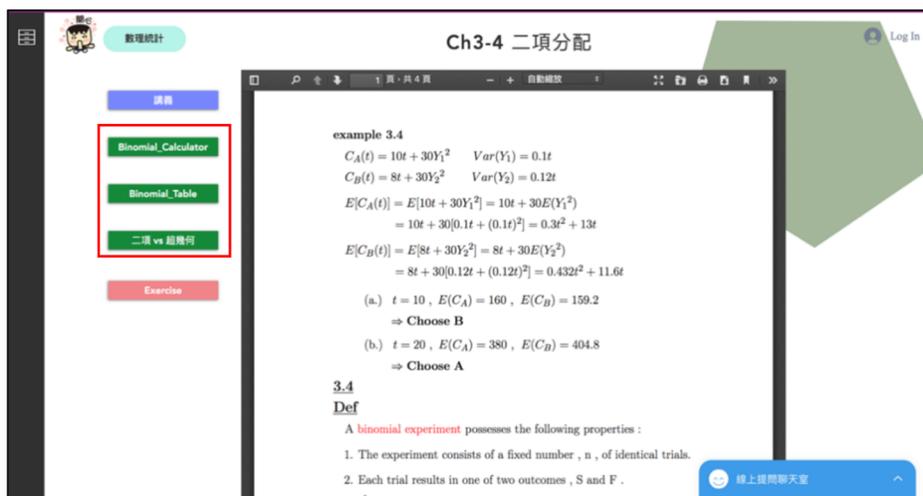


圖6 教學網站畫面

### (二) R-SHINY互動式數位教材

本網站相較於其他統計學習網站，最大特色為提供互動式視覺化教學環境，係根據第一階段所設計的R-SHINY程式教材，建立互動式教學平臺。圖6中點選左側紅框綠色的區塊，則會出現所屬章節的R-SHINY動態教材。

如何利用視覺化圖像呈現輔助學生對理論證明的瞭解，為本網站動態教材設計的重點。以二項分配的極大值發生處的理論證明為例，理論

的敘述為：

若存在一個二項分配， $X \sim Bin(n, p)$ ，其中  $0 < p < 1$ ，則  $P(X = k)$  將會在  $k$  為小於或等於  $(n+1)p$  的最大整數時達到極大值。

本動態教材設計包含三部分，首先給定某個特定數值，讓學生以計算相關的機率瞭解定理敘述的意義，如圖7所示。第二部分則詳細列出定理證明的過程，讓學生可以瞭解詳細的推導過程，如圖8中右上方的部分。第三部分則為本網站的特色，將證明的過程設計出視覺化的呈現意義，以本例題證明的邏輯而言，可以將原始的問題轉換為：

當  $k$  為符合  $P(X = k) / P(X = k - 1) \geq 1$  之最大整數時，將會使該二項分配在  $X = k$  點上達到機率之極大值。

經由本研究的視覺化設計，學生可以藉由改變圖8中左側儀板表的數值，在右邊下方的圖形看出該公式在  $k$  為二項分配所有可能值之下的比值散佈圖，並得知最大值發生之處，達成學習的目標。

Discrete distribution calculator Calculator Proof Exercise

**Example 3.6**  
Consider the binomial distribution with  $n$  trials and  $P(S) = p$ .

a. Show that

$$\frac{p(y)}{p(y-1)} = \frac{(n-y+1)p}{yq}, y = 1, 2, \dots, n.$$

Equivalently, for  $y = 1, 2, \dots, n$ , the equation

$$p(y) = \frac{(n-y+1)p}{yq} p(y-1)$$

gives a recursive relationship between the probabilities associated with successive values of  $Y$ .

b. If  $n = 90$  and  $p = 0.04$ , use the above relationship to find  $P(Y < 3)$

c. Show that

$$\frac{p(y)}{p(y-1)} = \frac{(n-y+1)p}{yq} > 1, \text{ if } y < (n+1)p,$$

that

$$\frac{p(y)}{p(y-1)} = 1, \text{ if } (n+1)p \text{ is an integer and } y = (n+1)p.$$

顯示詳解

a. Found by pulling in the formula for  $p(y)$  and  $p(y-1)$  and simplifying.

b. Note that  $P(Y < 3) = P(Y \leq 2) = P(Y = 2) + P(Y = 1) + P(Y = 0)$ .  
Now,  $P(Y = 0) = (0.96)^{90} \approx 0.0254$ .

Then,  $P(Y = 1) = \frac{(90-1+1)0.04}{1(0.96)} (0.0254) = 0.0952$   
and  $P(Y = 2) = \frac{(90-1+1)0.04}{2(0.96)} (0.0952) = .1765$ .

Thus,  $P(Y < 3) = 0.0254 + 0.0952 + 0.1765 = 0.2971$

c.  $\frac{(n-y+1)}{yq} > 1$  is equivalent to  $(n+1)p - yp > yq$  is equivalent to  $(n+1)p > y$ .  
The others are similar.

d. Since for  $y \leq (n+1)p$ , then  $p(y) \geq p(y-1) > p(y-2) > \dots$   
Also, for  $y \geq (n+1)p$ , then  $p(y) \geq p(y+1) > p(y+2) > \dots$   
It is clear that  $p(y)$  is maximized when  $y$  is a close to  $(n+1)p$  as possible.

圖7 透過機率計算瞭解定理敘述內容

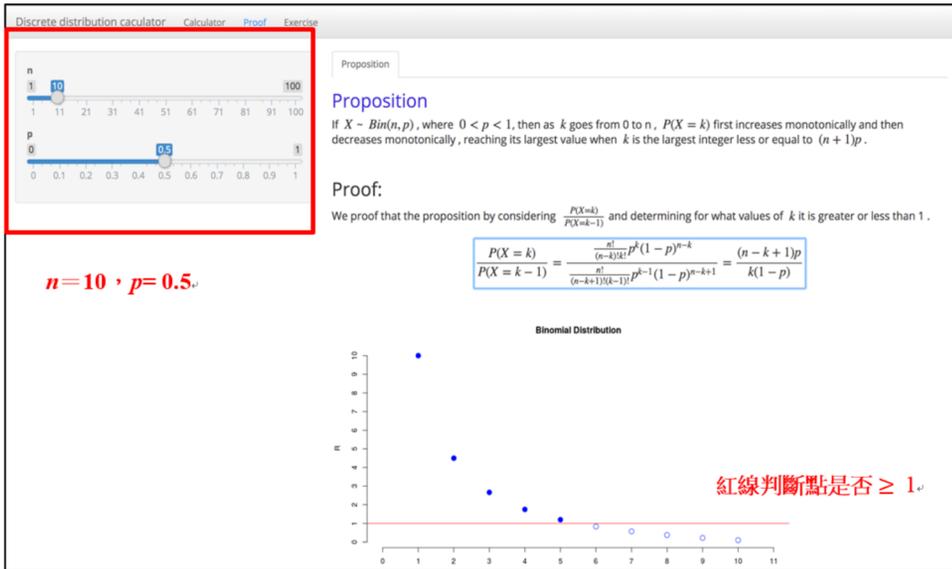


圖8 理論證明及其視覺化呈現

### (三) 線上測驗功能

本研究加入線上測驗功能，讓同學可以隨時瞭解自我的學習成效。為了讓同學能即時釐清觀念，可在作答完成後即時得到相應回饋，若不甚清楚題目之計算可點選「顯示詳解」選項，展開題目詳解，以測驗自己對本小節概念是否熟悉，測驗畫面如圖9所示。

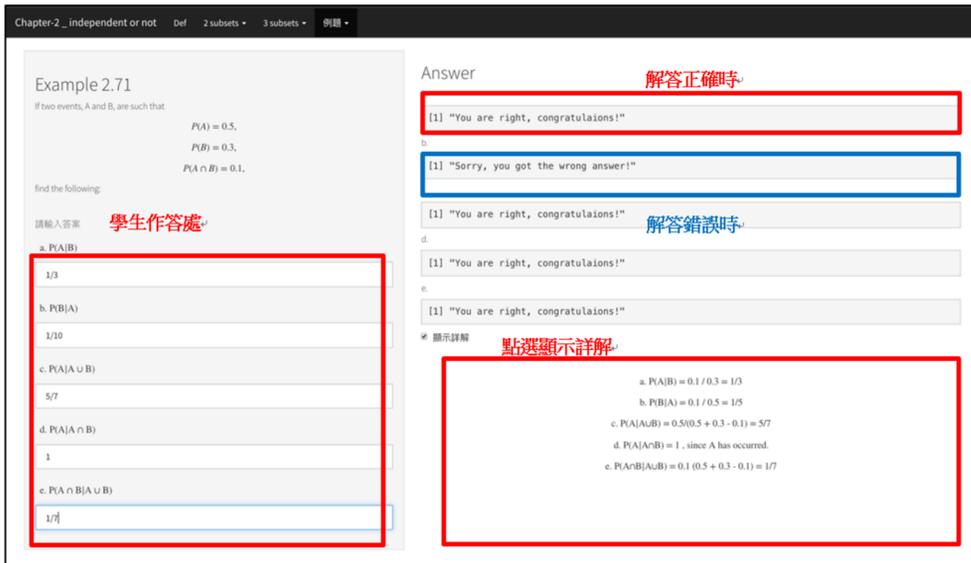


圖9 線上測驗畫面

#### (四) 線上家教及討論功能

學生可利用線上聊天室與教師或助教聯繫，學生於網頁中透過 Skype 的方式，與教師或助教進行視訊影音教學。視訊教學除了不受時間地點限制的優點外，更沒有直接與教師面對面的壓力。對於比較不習慣直接詢問教師的學生，也可以藉由討論區發表文章來討論作業與課堂問題，其他同學可以針對問題留言，如此不僅可以提升學習效率，更能培養學生自主學習和解決問題的能力。

### 三、學生學習成效分析

本研究初期由教師撰寫程式，利用程式呈現理論統計意涵，藉由動態的呈現，引領學生觀察圖形（或圖表）的變化，並進一步連結原本已學的統計知識，希望透過視覺化的呈現讓學生瞭解抽象數學或統計觀念。由於本課程內容繁重，因此融入電腦輔助教學的時間有限，本研究共融入五個單元，分別為二項分配、Gamma 分配與 Beta 分配、聯合機率分配、順序統計量及抽樣分配，以下將分別以五個單元的測驗結果

作為實驗組與對照組學生的學習成效比較。本研究在學期初以第一次小考作為前測，確定實驗組與對照組學生平均成績無顯著差異，確認兩組同學起點行為是一致後，再融入電腦輔助教學，進行兩組學生後測成績的分析比較。前測的單元為機率論，後測的單元則為上述融入電腦輔助教學法的教學單元；前測與後測的題型皆為計算證明題，考題的內容包含統計性質的數理推導與推導結果的統計推論。本研究以獨立樣本  $t$  檢定作為實驗組成績平均數是否優於對照組成績平均數的檢定方法，以 Wilcoxon rank-sum test 作為實驗組成績中位數是否優於對照組成績中位數的檢定方法。表1為實驗組及對照組平均數及中位數差異的檢定結果，表中的數值為  $p$  值，在顯著水準  $\alpha = 0.05$  下，當  $p$  值小於 0.05 時，表示實驗組學生成績的平均數（或中位數）顯著高於對照組學生成績的平均數（或中位數），反之則表示實驗組學生成績的平均數（或中位數）並未高於對照組學生成績的平均數（或中位數）。由表1中可以看出在二項分配、Gamma分配與Beta分配、順序統計量及抽樣分配四個單元中，實驗組學生成績皆顯著高於對照組學生成績，其中二項分配、Gamma分配與Beta分配及抽樣分配三個單元的內容皆與圖形有很大的關聯，學生經由互動式儀板表的參數改變，可以進一步觀察其在數學式或圖形的改變，有效增進學習成效；而順序統計量屬於抽象的單元，以往學生多著重在數理運算上，卻不知推導完成的結果所代表的意義。本單元的動態教材設計以實際抽樣作為數值模擬，並同時以數值及圖形呈現，希望學生可以瞭解其抽樣分配所代表的意義，結果顯示學生學習成效明顯優於對照組學生，代表數值模擬可以有效增強抽象單元的學習。而在聯合機率分配單元中，實驗組學生與對照組學生的學習成效則無顯著的差異，可能原因為本單元內容多數著重在積分技巧的運算，動態教材對於學習的幫助有限，建議後續研究者可以朝此方向精進動態教材的設計。

表1

**實驗組與對照組學習成效比較表**（表中數值為檢定結果的  $p$  值）

單元	平均數差異檢定結果	中位數差異檢定結果
	$H_0 : \mu_{\text{實驗組}} \leq \mu_{\text{對照組}}$	$H_0 : m_{\text{實驗組}} \leq m_{\text{對照組}}$
	$H_1 : \mu_{\text{實驗組}} > \mu_{\text{對照組}}$	$H_1 : m_{\text{實驗組}} > m_{\text{對照組}}$
二項分配	0.002	0.003
Gamma分配與Beta分配	<0.001	<0.001
聯合機率	0.967	0.963
順序統計量	<0.001	<0.001
抽樣分配	<0.001	<0.001

#### 四、學生課程評量回饋

本研究為了進行學習成效比較，將任教的兩個班級分別作為實驗組與對照組，107-1學期融入電腦輔助教學法，107-2學期融入合作學習教學法與發表教學法。在107-1學期的教學評量中，實驗組及對照組的教學評量分數分別為4.31及4.19（皆高於全系全院及全校平均分數），實驗組學生對於課程的評量分數高於對照組學生，顯示同學對於融入電腦輔助教學法持以肯定的態度；在107-2學期的教學評量中，實驗組及對照組的教學評量分數分別為4.28及4.79，實驗組分數與上學期差異不大，實驗組教學評量分數較低可能歸因於融入創新教學法後，教師除了授課內容增加，亦要求學生額外進行課後作業及報告的撰寫，因此學生明顯感受到課程負擔變重。另外一個可能的原因，由於多數學生對於R程式並不熟悉，因此當本課程要求學生撰寫程式時，除了增加學生的學習負擔外，許多學生更可能在程式設計部分受挫。不過值得一提的是，實驗組的學生學習成效顯著優於對照組學生學習成效，顯示本課程的創新教學雖然增加了學生的學習負擔，但也讓學生在創新教學的學習歷程中，對於數理統計課程有更好的理解。在開放題的回覆中（包含期末教學評量及校內創新教學回饋），學生多數給予本課程正面的評價。關於部分實驗組同學反應本課程授課內容繁重，增加的創新教學方法壓縮原本的授課時間，期末報告亦增加學習負擔，這部分將作為本研究後續努力的方向。

## 伍、結論與建議

在現今的高教環境中，一位大學教師需要兼顧教學、研究、輔導及服務各個面向，除了對學生的教導外，還需要同時在學術道路上努力耕耘著，工作負擔可謂非常繁重。隨著社會環境的變遷和高教體系的轉變，學生學習態度已不若以往的積極；不過從另外一個角度思考，學生接觸的資訊更為多元與進步，創造力相較於以往，反而提升了許多。如何運用當今學生的優勢，進而培養出正確的學習態度，是一位大學教師的神聖使命。

數理統計課程的課程目標為教導學生學習統計理論，相較於其他課程而言，數理統計的課程內容更著重在理論的講述與推導，對學生來說，課程內容艱澀難懂，在學習上備感困難。在以往的經驗中，即使增加了額外的授課時數與課後輔導，發揮的效果仍然有限。可能的原因為所增加的輔導機制，並未針對學生個人的學習困難進行補強，無法達到適性教學的目的。因此本次創新教學融入了資訊的元素，利用R-SHINY程式設計出數位教材，讓學生可以針對自我的學習困難，藉由互動式的數位教材的數值模擬呈現，增進學習的成效，進一步達成自主學習的目的。

本次教學創新在實驗組的班級，融入了電腦輔助教學法、合作學習教學法及發表教學法。採用電腦輔助教學法時，可以明顯感受到學生較為專注，在融入R-SHINY程式教學時，透過視覺化的呈現及說明當中，學生較能去聚焦統計的結果，而不單是數學的推導。採用合作學習教學法時，藉由同儕的激勵與刺激，學生的投入與參與度極高，也多數都能完成學習單的內容。藉由主題式的海報發表，透過海報內容的設計與製作，學生可以再一次複習授課內容。透過評分教師的提問，更能找出自己學習困難所在，達成學習的目的。另外，在海報發表時，可以發現同學們皆充分展現自己的自信，與考試時的挫敗有很大的差別。引領學生建立自我的自信心，才能讓學生在學習的道路上找到自我的價值，往成功邁進。

不過，由於數理統計課程內容繁多，原本教學步調就非常緊湊，本次課程已經盡量融入不同主題的動態視覺化於教學中，然而受限於教

學進度的壓力，能融入的單元有限。未來可能努力的方向為在初等統計學就融入視覺化數位教材進行輔助學習，以便日後在數理統計融入創新教學時，可以直接進入較深入的內容探討，如此將可能讓更多的單元主題可以融入創新教學。本次創新教學進一步建立互動式數理統計數位學習網站，提供學生課後輔助學習之用。不過，由於屬於課程外的學習，因此如何做有效的控管與協助，才能發揮學習網站最大的效用，是未來可以努力去規劃的方向。另外，在學期末的教學評量回饋中，學生雖然肯定輔助教學的成效，但實際上的操作上，需要累積更多次的實驗教學，才能進一步評定整體成效。此外，數位教學最大的問題是學習成效評量，如何設計出兼顧測驗學理與實務的有效評量機制，為未來需要克服的困難。最後，在本次創新教學中，發現學生的程式設計能力較為不足，未來可能努力的方向有二，一為嘗試教導學生直接使用網路上 R-SHINY 相關的工具進行學習，如此將可以降低程式撰寫的必要性；另外一個可能的方向為建議系上將程式設計列為數理統計的先修課程，或是嘗試朝整合程式設計與數理統計兩門課程的方向努力。

## 誌謝

本論文感謝教育部教學實踐計畫（計畫編號：PMS107014）支持。

## 參考文獻

- 林曉芳（2013）。合作學習教學策略在成人教育之應用。**教育學術彙刊**，**5**，83-102。
- 林曉芳、盧冠樺（2009）。統計學令研究生害怕嗎？以教育統計學的學習歷程為例。**明道學術論壇**，**5(2)**，41-61。
- 張國恩（2002）。從學習科技的發展看資訊科技融入教學的內涵。**北縣教育**，**41**，16-25。
- 梁菁萍（2019）。資訊科技應用在護理系學生生物統計課程學習之行動研究。教育部教學實踐研究計畫成果報告。
- 郭國禎、駱芳美（2011）。統計焦慮量表信度與效度考驗。**輔導與諮商**

學報，33(1)，23-38。

陳子宜、謝碧雪（2017）。探討GSP動態教學對國三學生學習三角形外心、內心及重心之成效。**International Journal of Science and Engineering**，7(1)，21-52。

黃添丁（2014）。從數位學習融入課程探討統計焦慮及統計態度對學習成效的影響。**人文與應用科學期刊**，8，77-89。

黃楷甯（2016）。高雄地區國中數學GSP電腦輔助教學之行動研究——以圓單元為例（未出版之碩士論文）。國立高雄師範大學，高雄市。

楊玲惠、翁頂升、楊德清（2015）。發展數位教材輔助學生學習之研究——以科大學生之統計教學課程為例。**臺灣數學教育期刊**，2(1)，1-22。

譚克平（2005）。提升科教研究生基本統計能力之研究。行政院國家科學委員會專題研究期末報告（編號：NSC 93-2521-S-003-013-），未出版。

DeVaney, T. A. (2010). Anxiety and attitude of graduate students in on-campus vs. online statistics courses. *Journal of Statistics Education*, 18(1), 1-15.

Onwuegbuzie, A. J. (2004). Academic procrastination and statistics anxiety. *Assessment & Evaluation in Higher Education*, 29(1), 3-19.

Schunk, D. H. (1996). *Learning theories: An educational perspective* (2nd ed.). Englewood Cliffs, NJ: Merrill.

Yilmaz, M. R. (1996). The challenge of teaching statistics to non-specialists. *Journal of Statistics Education*, 4(1). Retrieved from <http://www.amstat.org/publications/jse/v4n1/yilmaz.html>

# Innovative Teaching of Mathematical Statistics: Integrating Technology into Instructions

Hung-Yi Lu\*

## Abstract

Students majoring in statistics typically consider mathematical statistics a difficult subject, with its the abstruse theories and low sense of accomplishment. This study applied R-SHINY programs in graphic drawing and statistical simulation to help students learn abstract mathematical concepts and enhance learning effectiveness through data visualization. Participants included students who took the course of mathematical statistics in the academic year of 2018, and they were divided into experimental and control groups. The experimental group was taught using the R-SHINY programs integrated into the conventional instructional method, while the control group was taught using only the conventional method. The results indicated that the presentation of dynamic graphics, led the experimental group to exhibit better learning; in addition, visualized presentations and explanations helped the students understand statistical theories, thus increasing learning effectiveness. The results also revealed that the experimental group had higher learning effectiveness than the control group. Further, through poster presentations, students were shown to learn statistical theories and programming simultaneously. Moreover, teachers' questions can help make students aware of their misconceptions about mathematical statistics, thereby achieving their learning goals.

**Keywords:** R-SHINY, data visualization, e-learning, mathematical statistics



---

DOI : 10.6870/JTPRHE.202012\_4(2).0004

Received: September 14, 2020; Modified: February 26, 2021; Accepted: April 1, 2021

\* Hung-Yi Lu, Associate Professor, Department of Statistics and Information Science, Fu Jen Catholic University, E-mail: 069201@gapp.fju.edu.tw